Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

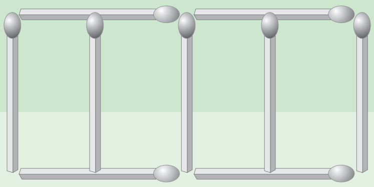
EUCLIDES

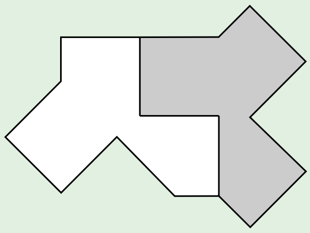
Vakblad voor de wiskundeleraar

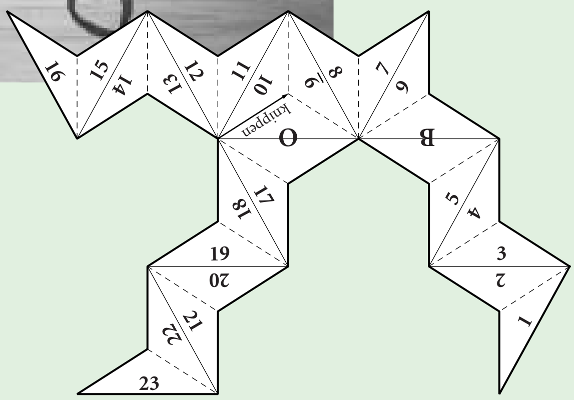
jaargang 75
1999-2000 nov./dec.
3











Evaluatie wiskunde in basisvorming

VMBO in aantocht

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Redactie

Dr. A.G. van Asch
Drs. R. Bosch
H.H. Daale
Drs. W.L.J. Doeve
Drs. J.H. de Geus
Drs. C.P. Hoogland *hoofdredacteur*
Ir. W.J.M. Laaper *secretaris*
W. Schaafsma
Ir. V.E. Schmidt *voorz./penningm.*
Mw. Y. Schuringa-Schogt *eindred.*
J. Sinnema
J. van 't Spijker

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Veldzichtstraat 24
3731 GH De Bilt
e-mail: cph@xs4all.nl

Richtlijnen voor artikelen:
- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Richtlijnen voor mededelingen:
- zie kalender achterin.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.euronet.nl/~nvvw

Voorzitter
Drs. M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: mkommer@knoware.nl
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8
8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail:
wkuipers@worldonline.nl
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19
8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: NVvW@euronet.nl

Contributie per ver. jaar: *ƒ* 80,00
Studentleden: *ƒ* 40,00
Leden van de VVWL: *ƒ* 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: *ƒ* 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: *ƒ* 85,00 per jaar. Voor instituten en scholen: *ƒ* 240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor *ƒ* 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties
Informatie, prijsopgave en inzending:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordecht, tel. 078-6390890
fax 078-6390891
e-mail lbozuwa@worldonline.nl

Colofon
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Adresgegevens auteurs

R. Bosch
Heiakker 16
4841 CR Prinsenbeek

A. Fey - den Boer
TU Eindhoven
fac. Technische Natuurkunde
Postbus 513
5600 MB Einhoven

W. Kleijne
Rijksinspectiekantoor
Postbus 10048
8000 GA Zwolle

M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk

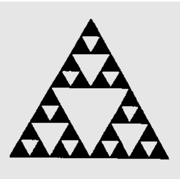
G. van Lent
Admiraliteitskade 21 H
3063 ED Rotterdam

J. Chr. Perrenet
Universiteit Maastricht
FdAW p/a Informatica
Postbus 616
6200 MD Maastricht

L. van Schalkwijk
Kuluutsheuvel 20
5825 BE Overloon

A. Vink
Prins Mauritssingel 34
3043 PG Rotterdam

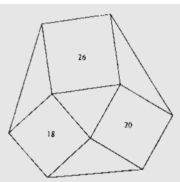
Inhoud



83



92



97

74 Kees Hoogland
Van de redactietafel

75 Wim Kleijne
Wiskunde in de basisvorming
Evaluatie van de eerste vijf jaar

78 Rob Bosch
Quod erat demonstrandum
Het laatjesprincipe

81 Anders Vink, Kees Hoogland
VMBO in aantocht
Stand van zaken

83 Lodewijk van Schalkwijk
Onderzoekend wiskunde leren

90 Redactiecommissie Jubileumboek
Honderd jaar wiskunde-onderwijs (3)

91 Marian Kollenveld
Van de bestuurstafel
NVvW

92 Gerben van Lent
SofMat 98

96 **Boekbespreking**

97 Jacob Perrenet
5de Mathematische Modelleercompetitie Maastricht 1999

101 Anne Fey-den Boer
Schoolboeken en studieresultaten

103 **40 jaar geleden**

104 **Oplossingen van de puzzels in het programmaboekje van 13-11-'99**

106 **Recreatie**

108 **Kalender**

108b **Wintersymposium 2000**
AANKONDIGING

van de redactietafel



Het laatste nummer van deze eeuw, zelfs van dit millennium. U zult zo langzamerhand wel overspoeld worden met dit soort uitspraken. De komende weken zal dat tot een hoogtepunt leiden: de laatste les 3 havo in dit millennium, de laatste praktijkopdracht in klas 2 deze eeuw, de laatste obligate toespraak van de rector deze eeuw, het laatste halve flesje wijn als kerstpakket in dit millennium.
En dat terwijl wiskundigen en wiskundedocenten er niet eens van overtuigd zijn dat het nieuwe millennium begint op 1 januari 2000. Voor 1 januari 2001 is ook veel te zeggen.

Basisvorming

Dit nummer begint met een artikel over de evaluatie van de basisvorming door de inspectie. Het is een heldere samenvatting van het deelrapport dat over wiskunde is verschenen.
De afgelopen jaren werd het woord basisvorming meestal slechts uitgesproken met een nauwelijks verholen sarcasme.
De laatste tijd lijken scholen weer volop bezig om te kijken welke onderdelen van de basisvorming belangrijk en nuttig zijn met het oog op de pas ingevoerde Tweede Fase havo/vwo en het snel naderende vmbo.
Wil je in de Tweede Fase serieus werk maken van praktische opdrachten en profielwerkstuk en op vergelijkbare manier in het vmbo van praktische opdrachten/GWA en sectorwerkstuk, dan is het van het grootste belang dat daar al in de eerste klassen mee begonnen wordt.
Dat besef begint snel toe te nemen.
Hetzelfde geldt voor het gebruik van computers en geavanceerde rekenmachines.
Volgens het inspectierapport werd tot voor kort aan beide thema's niet veel aandacht besteed. Volgens mij echter vrij recent wel steeds meer.
Hoe zit dat eigenlijk bij u op school? De leerlingen die nu in klas 1 zitten zullen straks in de derde klas waarschijnlijk al beginnen aan het examendossier wiskunde vmbo.

Het inspectierapport

De eindconclusie van het inspectierapport is dat wiskunde in de basisvorming vijf jaar na de invoering nog te weinig uit de verf komt.
Zo'n conclusie heeft natuurlijk te maken met wat je verwacht en waar je vindt dat de cesuur moet liggen.
Vergeleken met andere vakken is er bij wiskunde in 1993 in de brugklas een compleet nieuw programma ingevoerd.
Mijn conclusie op dezelfde gegevens zou zijn dat er de afgelopen vijf jaar ontzettend veel is veranderd bij wiskunde, niet in de minste plaats door de inspanningen van duizenden wiskundedocenten, die zich hebben ingewerkt in nieuwe boeken, in een nieuwe werkwijze, in nieuwe toetsen en in nieuwe software.
Ik vind de resultaten bij wiskunde dan ruim meer dan je normaal mag verwachten bij veranderingen in het onderwijs.
Maar goed, smaken en oordelen verschillen.
De redactie is natuurlijk erg benieuwd naar uw conclusies in dit licht. Laat uw mening gerust weten aan de redactie. We komen hier graag nog op terug.

Vmbo

In de vorige kolom zijn bij de opmerkingen over wiskunde in het vmbo een aantal termen voorbij gekomen als: praktische opdrachten, sectorwerkstuk en een examendossier, dat mogelijk al in klas 3 een rol gaat spelen. Kunt u deze opmerkingen in het geheel niet plaatsen, dan is het hoog tijd dat u het artikel in dit nummer leest over de stand van zaken in het vmbo.
In deze jaargang zullen we een aantal onderdelen daarvan verder uitwerken in artikelen. Misschien een goed moment om even te checken of de collega's vmbo bij u op school al lid zijn van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het is echt nuttig hoor, om goed op de hoogte te blijven van de veranderingen.

Kees Hoogland

Evaluatie van de eerste vijf jaar

Wiskunde in de basisvorming

Wim Kleijne

Inleiding

Weet iedereen het nog? Op 1 augustus 1993 is de basisvorming in het voortgezet onderwijs ingevoerd. Voor 15 vakken werden kerndoelen en algemene vaardigheidsdoelen vastgesteld. De inhoud van het onderwijs zou worden gemoderniseerd en geharmoniseerd, verplichte studie- en beroepskeuze zouden worden uitgesteld en het peil van het jeugdonderwijs moest verhoogd worden. Wat is daar na vijf jaar van terecht gekomen?

Dat staat beschreven in het rapport *Werk aan de basis* van de Inspectie van het Voortgezet Onderwijs. Een verslag van een grootschalig onderzoek op 120 scholen waar met veel betrokkenen is gesproken en waar onder andere circa 7300 lessen zijn bezocht. De uiteindelijke conclusie van het onderzoek is dat scholen nog weinig vorderingen hebben gemaakt met de aanpassing in het onderwijs aan de basisvorming. Er zijn wel duidelijke verschillen tussen scholen. Er zijn scholen die goed op weg zijn en in het licht van een ontwikkelingsperspectief geeft dat hoop voor de toekomst.

Bij het rapport *Werk aan de basis* is een publieksversie uitgegeven en zijn 19 vakrapporten over de kwaliteit van de vakken van de basisvorming verschenen. Dit artikel geeft een samenvatting van het rapport over het vak wiskunde. Het opent met de aanloop van het vak naar de basisvorming. Vervolgens is in het artikel te lezen wat de kwaliteit is van het leerstofaanbod, de lessen en hoe de vaksecties functioneren. Dan wordt iets gezegd over de leerlingresultaten. Als afsluiting worden enige mogelijkheden geschetst die de inspectie ziet ter verbetering van de kwaliteit. Toegevoegd is een samenvatting en de zogenaamde vakkaart die de lezer een grafisch overzicht van alle onderzochte aspecten geeft.

De aanloop

Het wiskundeonderwijs aan twaalf- tot zestienjarige leerlingen is met de basisvorming een nieuwe weg ingeslagen. Hiermee werden verschillende doelen beoogd. Zo zouden lessen wiskunde beter moeten aansluiten bij zowel het basisonderwijs als bij de bovenbouw van het voortgezet onderwijs. Het wiskundeonderwijs zou meer concrete aangrijpingspunten moeten bieden dan vroeger. Meer zelfstandig leren en het ontwikkelen van een onderzoekende houding, waarbij rekening gehouden zou worden met verschillen tussen leerlingen zouden een integrale plaats moeten krijgen. Een en ander werd verwoord en vastgelegd in doelomschrijvingen: algemene vaardigheidsdoelen en de vakspecifieke kerndoelen.

Het leerstofaanbod

Methoden
Bij de start van de basisvorming verschenen er, naast de aangepaste bestaande methoden, enkele nieuwe methoden voor wiskunde. De meeste daarvan zijn na enige tijd weer verdwenen. Alle methoden zijn toegeschreven op de kerndoelen, zowel de vakspecifieke kerndoelen, als de algemene vaardigheidsdoelen. De verschillen tussen de methoden komen tot uiting in de didactische benadering van de leerstofonderdelen, in de methodische indeling van de leerstof, in de verhouding tussen de formele en de meer concrete benadering van de wiskunde en in de manier waarop leerlingen geleerd wordt zelfstandig met wiskundige problemen om te gaan.

Aanbod van de kerndoelen
De inspectie heeft onderzocht of de leraren wiskunde er in slagen alle kerndoelen aan bod te laten komen in hun onderwijs. In de in de inleiding vermelde rapporten

staat beschreven welke onderzoeksmethode hierbij is gevolgd en welke beoordelingsnormen hierbij zijn aangelegd. In dit artikel worden alleen enkele naar voren springende resultaten vermeld. Voor de achtergronden hiervan wordt verwezen naar de genoemde rapporten.
In het onderzoek is gebleken dat bijna tweederde van de vestigingen van scholen alle kerndoelen in voldoende mate behandelen. Nadere analyse leert dat in 98% van de scholen ten minste 80% van de kerndoelen aan bod komt. Grof samengevat betekent het voorgaande dat het gros van de scholen slechts aan een beperkt aantal kerndoelen niet toe komt. Dat geldt dan voor die kerndoelen die voor bepaalde categorieën leerlingen te moeilijk worden geacht (bijvoorbeeld 'rationale getallen' voor vbo-leerlingen), die te tijdrovend worden gevonden (bijvoorbeeld 'gegevens verzamelen') of die waarvoor leraren zich niet altijd competent achten (bijvoorbeeld 'data verwerken' en 'computer programma's')
De kerndoelen voor het vak wiskunde schenken expliciet aandacht aan het gebruik van de computer. Computergebruik is daarmee wettelijk voorgeschreven.
Voor de basisvorming is geschikte software voor wiskunde beschikbaar. Ook de leerboeken refereren hieraan. Het is dan ook teleurstellend te moeten constateren dat hard- en software slechts in zeer geringe mate in de wiskundelessen gebruikt worden. De inspectie denkt dat de redenen hiervoor kunnen zijn het gebrek aan didactische ervaring van leraren met computers en de in veel scholen beperkte beschikbaarheid of bruikbaarheid van de hardware.

Bijdrage aan de algemene vaardigheidsdoelen
Alhoewel veel onderdelen geschikt zijn voor (onderdelen van) de algemene vaardigheidsdoelen, worden deze doelen slechts in geringe mate gerealiseerd. Zo vrezen veel leraren dat voor met name leerlingen in het vbo en mavo door concentratieproblemen het 'samenwerken' minder goed gerealiseerd kan worden. Ook 'eenvoudig onderzoek doen' komt weinig voor evenals de andere algemene vaardigheidsdoelen. De 'geïntegreerde wiskundige activiteiten' zouden goede aanknopingspunten voor deze doelen kunnen vormen. In het algemeen zien leraren algemene vaardigheidsdoelen te weinig terugkomen in de examens. Wellicht is dat de reden dat zij aan deze doelen minder aandacht schenken dan vereist is.

De lessen

Gedurende het onderzoek heeft de inspectie ruim 650 wiskundelessen bijgewoond en geanalyseerd. Tijdens de lessen is gekeken naar het pedagogisch handelen van leraren, het klassenmanagement, de vakdidactiek, het bevorderen van actief leren en het rekening houden met verschillen. Voor ieder aspect beschikte de inspectie over een lijst met kwaliteitskenmerken ('indicatoren'). Voor de achtergronden en de verantwoording hiervan wordt weer naar de eerder genoemde rapporten verwezen. Enkele resultaten volgen hier.

Pedagogisch handelen
Veel leerlingen in de leeftijd waarop zij aan de basisvorming deelnemen, hebben behoefte aan acceptatie, veiligheid, structuur, uitdaging en stimulans. Als aan deze behoeften is voldaan, draagt dat bij aan het onderwijsleerproces. De inspectie vond dat in ongeveer vier van de vijf wiskundelessen de leraren aan belangrijke voorwaarden voldoen voor het scheppen van een goed pedagogisch klimaat. In een kleine 20% van de lessen waren leraren helaas niet in staat op een pedagogisch verantwoorde wijze met leerlingen om te gaan.

Instructie en klassenmanagement
Bij de observaties van het lesgeven en de organisatie van het onderwijsleerproces is onder meer gelet op de structuur van de lessen, de kwaliteit van de uitleg van de leerstof, de voorwaarden om taakgericht te werken en de feedback van leraren aan hun leerlingen.
Iets minder dan driekwart van de lessen wiskunde voldoen op deze punten aan de gestelde eisen. Opvallend is de hoge score voor wiskunde op het aspect 'duidelijke uitleg'. Soms ontberen de lessen echter wat variatie en structuur. Overigens zijn de aspecten van vakmanschap die hierbij horen niet specifiek verbonden met de invoering van de basisvorming. Ze gelden altijd, in alle onderwijssituaties.

Vakdidactisch handelen
Aan de basis van de beoordeling van het vakdidactisch handelen van de leraar wiskunde ligt een vakdidactisch profiel dat afgeleid is uit de (algemene) doelstellingen voor het vak wiskunde. Tot dit profiel behoren de volgende elementen.

- De leraar stimuleert leerlingen om gegevens en uitkomsten kritisch te beoordelen.
- De leraar stimuleert leerlingen creatief te zijn in het bedenken van oplossingen.
- De leraar schenkt aandacht aan het proces van wiskundig generaliseren.
- De leraar schenkt aandacht aan de ontwikkeling van een goed wiskundig taalgebruik.
- De leraar vraagt van leerlingen een bepaalde omgang met problemen (analyseren, plan van aanpak maken, schriftelijk neerslaan).
- De leraar controleert regelmatig of de leerlingen de essentie van een wiskundig probleem hebben begrepen.

– De leraar geeft niet direct zelf de aanzetten voor de oplossing van problemen.
– De leraar bevordert de communicatie over wiskundeproblemen tussen leerlingen onderling.
– De leraar maakt goed gebruik van didactische hulpmiddelen.

Naast deze kenmerken zijn nog twee algemene indicatoren aan het profiel toegevoegd:
– De leraar verwijst naar andere vakken/leergebieden of naar leerstof uit andere domeinen.
– De leraar motiveert de leerlingen voor wiskunde en wekt interesse voor de inhoud.

In het onderzoek is gebleken dat op basis van dit profiel en de daarbij gevoegde normering tweederde van de lessen wiskunde als voldoende te kwalificeren is. Over het geheel genomen beheersen leraren wiskunde de vakdidactiek goed. De rijke historie in de wiskundedidactiek zal hier zeker van invloed zijn.

Bevorderen actief leren
'Actief leren' is een van de belangrijke didactische vernieuwingen van het onderwijsleerproces die de basisvorming nastreeft. Tijdens het school- en lesbezoek is onderzocht of leraren condities scheppen die actieve leerprocessen bevorderen. Zo is nagegaan of de leraar leerlingen stimuleert om initiatieven te nemen, of de leraar ruimte biedt voor zelfstandig werken en of de leraar bewust interacties tussen leerlingen organiseert.
Het onderzoek heeft uitgewezen dat in ongeveer drie van de vijf lessen de leraar het actief leren in voldoende mate bevordert. Ondanks het feit dat het moment van het onderzoek pas vijf jaar ligt na de invoering van de basisvorming, vindt de inspectie dit een teleurstellend resultaat. Zij verwacht echter dat de vernieuwing van de bovenbouw vbo/mavo en havo/vwo ook voor de basisvorming een krachtige nieuwe impuls zal betekenen voor actief en zelfstandig leren.

Rekening houden met verschillen
Rekening houden met verschillen tussen leerlingen is nodig om aan te sluiten bij hun capaciteiten en om er voor te zorgen dat zo veel mogelijk leerlingen de doelen van de basisvorming bereiken. Tijdens de lesbezoeken is onderzocht of leraren bij de instructie rekening houden met verschillen tussen leerlingen en/of leerlingen extra opdrachten of extra ondersteuning krijgen.
Bij wiskunde wordt weinig gedifferentieerd. In slechts 35% van de lessen houden leraren voldoende rekening met verschillen. Dit resultaat valt de inspectie tegen. Veel leraren zijn echter van mening dat door de huidige grotere mate van streaming, differentiatie binnen de klas minder nodig is.

De vaksecties

Vaksecties spelen in de organisatie van de school gewoonlijk een belangrijke rol bij het vormgeven van de inhoud en de (vak)didactische aanpak van het onderwijs. Naar het oordeel van de inspectie is het wenselijk dat leraren wiskunde in hun sectie met elkaar gedragslijnen afspreken voor de lessen en zich daaraan houden. Ook zouden zij in de sectie regelmatig de voortgang van het werk met elkaar moeten bespreken, zodat de gekozen aanpak waar nodig bijstelling kan krijgen. Ook op deze aspecten heeft het onderzoek zich gericht.
De inspectie heeft onderzocht of de secties wiskunde een actief sectiebeleid voeren. Daarbij is gelet op leerstofafspraken, (vak)didactische benadering, organisatie en inhoud van het werkoverleg. Verder is onderzocht of de secties samenwerken met andere secties en of zij het sectiebeleid afstemmen op het onderwijskundige beleid van de school. Slechts van ruim de helft van de secties wiskunde kon het sectiebeleid op deze punten als voldoende of goed beoordeeld worden: een resultaat dat naar de mening van de inspectie verbetering behoeft.
Driekwart van de leraren wiskunde houdt de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs goed bij (door literatuurstudie, na- en bijscholingscursussen e.d.).
Iets meer dan de helft van de wiskundesecties beschikt over een vaklokaal. Van de helft van deze lokalen laten inrichting en aankleding zodanig te wensen over dat daarin geen mogelijkheden zijn voor specifieke werkvormen.
Tweederde van de wiskundesecties beschikt over de vereiste didactische hulpmiddelen en vier van de vijf secties beschikt over hard- en software voor wiskunde.
Het belang van goed leiderschap binnen de vaksectie wordt op veel scholen sterk onderschat. Het hoofd van een sectie zou voor een goede vormgeving van het sectiebeleid tot het middenmanagement van een school moeten behoren. De sectieleider zou hiervoor over voldoende tijd, ruimte en faciliteiten moeten kunnen beschikken. Van groot belang is dat binnen de sectie tijd en ruimte wordt gecreëerd voor intervisie en gesprekken.

Leerlingresultaten

De afsluitende toetsen basisvorming geven inzicht in de resultaten die de leerlingen bij wiskunde behalen. Omdat de scholen en de leraren deze toetsen op uiteenlopende manieren afnemen, heeft de inspectie in 1997 en 1998 in samenwerking met het Cito voor vrijwel alle vakken van de basisvorming op een groep scholen proeftoetsen afgenomen. De omstandigheden waren

Het laatjesprincipe

In een aantal bewijzen, met name in de discrete wiskunde, wordt gebruik gemaakt van het zogenaamde laatjesprincipe. Dit principe zegt het volgende:

Als $n+1$ voorwerpen worden verdeeld over n laatjes, dan zal minstens een laatje twee of meer voorwerpen bevatten.

In een graaf noemen we het aantal lijnen dat in een punt samenkomt de graad van dat punt.
Met behulp van het laatjesprincipe bewijzen we eenvoudig de volgende stelling.

Stelling 1
Iedere graaf bevat minstens twee punten van dezelfde graad.

Bewijs:
Zij G een graaf met n punten. De graad van een punt is een natuurlijk getal $0, 1, 2, \ldots, n-1$. We onderscheiden nu twee gevallen.

1 Er is geen punt met graad 0. De mogelijke graden van de punten zijn dan $1, 2, \ldots, n-1$. We hebben echter n punten en derhalve hebben minstens twee punten dezelfde graad. (De $n-1$ mogelijke graden zijn hier de laatjes en de n punten zijn de objecten.)

2 Er is een punt met graad 0. In dit geval is er geen punt met graad $n-1$. (Er kan in dit geval geen punt zijn dat met alle andere punten verbonden is.)
De mogelijke graden zijn nu $0, 1, 2, \ldots, n-2$.
We hebben weer $n-1$ mogelijke graden en n punten en derhalve zijn er ook in dit geval minstens twee punten met dezelfde graad.

Het laatjesprincipe kan eenvoudig gegeneraliseerd worden.

Als $mn+1$ voorwerpen worden verdeeld over m laatjes dan zal minstens een laatje $n+1$ of meer voorwerpen bevatten.

Een toepassing van dit principe vinden we in het bewijs van de volgende stelling.

Stelling 2 (Erdös, Szekeres)
Een rij $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ van n^2+1 verschillende getallen bevat een monotoon stijgende deelrij van minstens $n+1$ getallen of een monotoon dalende deelrij van minstens $n+1$ getallen.

Bewijs:
Zij $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ de gegeven rij. We schrijven onder ieder term a_k van de rij het getal s_k dat de lengte aangeeft van de langste monotoon stijgende deelrij die begint bij a_k.

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots\ldots & a_{n^2+1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots\ldots & s_{n^2+1} \end{matrix}$$

Zo zijn bijvoorbeeld voor de rij 12, 9, 6, 11, 15 de s_k's resp. 2, 3, 3, 2, 1.

12	9	6	11	15
2	3	3	2	1

Als een van de s_k's groter of gelijk is aan $n+1$ dan hebben we een stijgende deelrij van minstens $n+1$ getallen. Neem nu aan dat alle s_k's hoogstens n zijn. We moeten dan n^2+1 getallen a_k (de voorwerpen) verdelen over de hoogstens n verschillende waarden van de s_k's (de laatjes). Derhalve zijn minstens $n+1$ van de s_k's gelijk (er is een laatje dat minstens $n+1$ voorwerpen bevat). We hebben nu een deelrij van $n+1$ getallen waarvoor de bijbehorende s_k's alle gelijk zijn aan, zeg s.

$$\begin{matrix} a_{i_1} & a_{i_2} & a_{i_3} & \ldots\ldots & a_{i_{n+1}} \\ s & s & s & \ldots\ldots & s \end{matrix}$$

We tonen nu aan dat de deelrij a_{i_k} een monotoon dalende deelrij is.
Stel dat $a_{i_2} > a_{i_1}$ dan voegen we a_{i_1} toe aan de monotoon stijgende deelrij van s getallen die begint met a_{i_2}. We vormen zo een monotoon stijgende deelrij van $s+1$ getallen beginnend bij a_{i_1}, hetgeen een tegenspraak oplevert. Derhalve is $a_{i_2} < a_{i_1}$. Aangezien dit argument geldt voor elk tweetal opvolgende termen uit de rij a_{i_k} is deze rij monotoon dalend.

Rob Bosch

daarbij op alle scholen voor alle leerlingen gelijk. Leraren en andere deskundigen hebben de resultaten van de proeftoetsen beoordeeld. Daarbij is tevens vastgesteld welk niveau leerlingen minimaal zouden moeten halen. De resultaten van de leerlingen zijn wisselend per onderdeel en per schoolsoort. In het algemeen kan hierover het volgende gezegd worden.
Vbo-leerlingen presteren op alle onderdelen onder niveau, met uitzondering van het onderdeel statistiek en kans: daar presteren zij juist boven niveau. Mavo- en havo/vwo-leerlingen presteren op één onderdeel onder niveau: rekenen, meten en schatten. (Dit onderdeel levert dus voor alle schoolsoorten problemen op.) Op de andere onderdelen presteren mavo- en havo/vwo-leerlingen op niveau. Kijken we naar het gemiddelde, dan moeten we concluderen dat te weinig leerlingen het vereiste minimumniveau halen.

Naar meer kwaliteit

Op grond van de resultaten van het onderzoek doet de inspectie de volgende aanbevelingen, onderscheiden naar wat leraren en secties, schoolleiders en de overheid kunnen bijdragen.

Leraren en secties
Het onderdeel 'geïntegreerde wiskundige activiteiten' dient onderdeel te vormen van het totale wiskunde-aanbod binnen de scholen.

Leraren zullen specifieke bekwaamheden moeten ontwikkelen voor het gebruik van computerprogramma's. Secties zullen een duidelijker inhoudelijk beleid moeten voeren waarbij tijd, ruimte en faciliteiten gereserveerd moeten zijn voor overleg en voor intervisie. Sectieleiders zullen hun leiderschap een goede inhoudelijke vorm moeten geven, gericht op het realiseren van goed wiskundeonderwijs op de school.

Schoolleiders
Stimuleer de scholing van docenten in computervaardigheid en zorg ervoor dat voldoende kwalitatief hoogstaande hardware beschikbaar is, het zijn noodzakelijke voorwaarden voor een goed computergebruik in de wiskundelessen.
Stimuleer het actief en inhoudelijk opereren van secties. Zorg voor tijd, ruimte en faciliteiten. Stimuleer daarnaast de ontwikkeling van andere overlegplatforms voor vakoverstijgende zaken.

Overheid
Geef scholen voldoende ruimte om vernieuwingen op schooleigen wijze in te voeren.
Stimuleer de ontwikkeling van nieuwe wiskundeprogramma's in (i)vbo, met contexten die aangepast zijn aan deze leerlingen.
Schaf de verplichting tot toetsen af.
Zorg er voor dat leraren niet te veel belast worden, geef ze ruimte om vernieuwingen in de praktijk uit te voeren.

Samenvatting en vakkaart

Algemeen
Het vak wiskunde in de basisvorming komt vijf jaar na invoering nog te weinig uit de verf. Het aanbod is op veel scholen nog niet voldoende dekkend voor de kerndoelen, al is het maar een beperkt deel van de kerndoelen dat ontbreekt. De lessen zijn niet altijd van voldoende kwaliteit, al is het vakdidactisch handelen wel in overeenstemming met de kenmerken van de basisvorming. De leerlingresultaten op de basisvormingstoetsen zijn over het geheel genomen onvoldoende: te weinig leerlingen slagen erin het minimumniveau te halen.

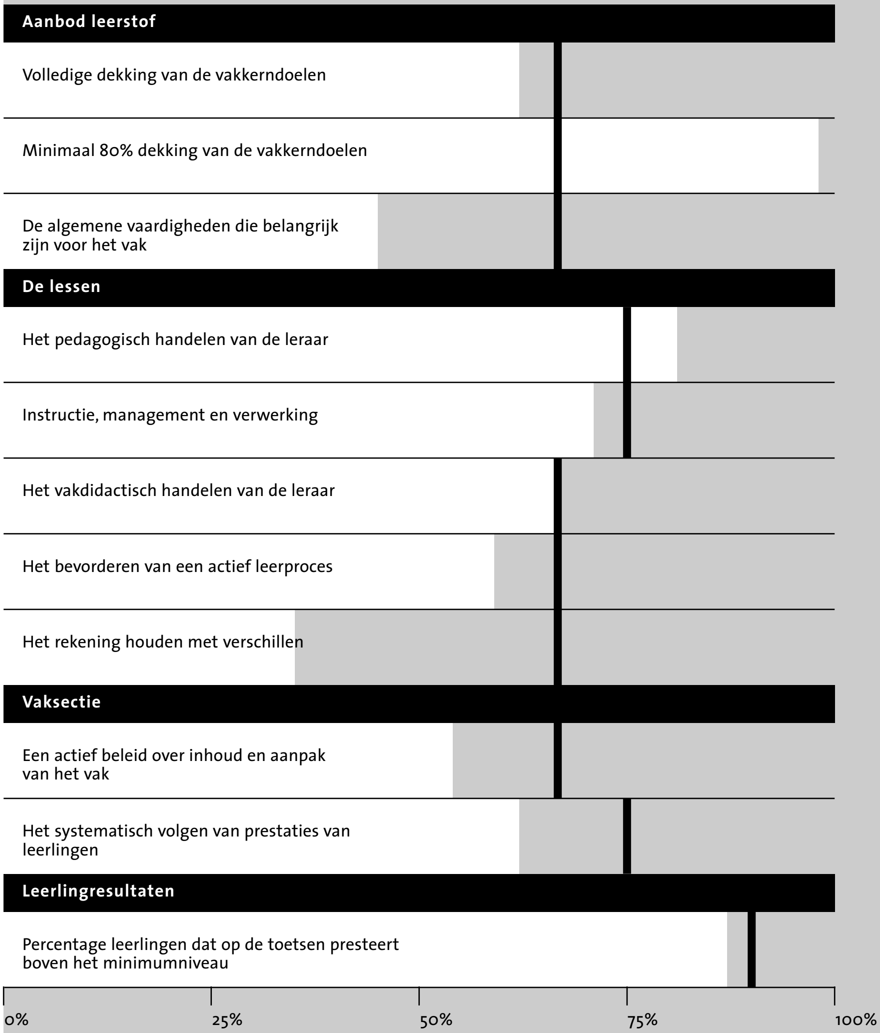
Vakkaart
Op de hierna volgende zogenaamde vakkaart is het landelijke oordeel van de inspectie samenvattend weergegeven. De normering op grond waarvan een (meer) positief dan wel een (meer) negatief oordeel wordt uitgesproken is na een zorgvuldige procedure vastgesteld. Daarbij zijn betrokkenen uit het onderwijsveld geraadpleegd. Op de vakkaart is deze norm met een streep zichtbaar gemaakt.
Voor een meer uitvoerige, gedetailleerde toelichting en verantwoording zij nogmaals gewezen naar de in de inleiding van dit artikel vermelde rapporten.

Inspectieteam
De volgende inspecteurs waren betrokken bij het onderzoek voor het vak wiskunde en bij het schrijven van het vakrapport wiskunde.
drs. W. Kleijne: woordvoerder voor het vak wiskunde, coördinerend inspecteur voortgezet onderwijs
dhr. F.H. Erkens: inspecteur voortgezet onderwijs
dhr. A. de Jong: inspecteur voortgezet onderwijs
dr. J.G. Nijenhuis: coördinerend inspecteur voortgezet onderwijs
drs. J. van der Pol: coördinerend inspecteur voortgezet onderwijs

Vakkaart wiskunde in de basisvorming

Onderzoeksuitkomsten van 120 scholen

Wat is de kwaliteit van het vak wiskunde in de basisvorming? (in procenten)



Kwaliteitsoordeel over de eerste vijf jaar van het onderwijs in wiskunde

Te weinig scholen behandelen de kerndoelen in voldoende mate

Voldoende scholen behandelen het grootste deel van de kerndoelen

Te weinig scholen behandelen de voor het vak belangrijke algemene vaardigheidsdoelen voldoende

In voldoende lessen handelen leraren pedagogisch adequaat

In te weinig lessen slagen leraren erin om voor een adequaat klassenmanagement te zorgen

In voldoende lessen is het vakdidactisch handelen van leraren in overeenstemming met de kenmerken van de basisvorming

In te weinig lessen bevorderen leraren het 'actief leren' adequaat

In te weinig lessen houden leraren op een goede manier rekening houden met de verschillen tussen leerlingen

Er zijn te weinig secties actief bezig met de ontwikkeling van het vak in de basisvorming

Er zijn te weinig secties bezig met het adequaat volgen van leerlingresultaten

Te weinig leerlingen halen het minimumniveau

Percentage van de 120 scholen en 670 lessen met een voldoende op betreffend evaluatie-onderwerp

Norm voor de verschillende evaluatie-onderwerpen

Stand van zaken

VMBO in aantocht

Anders Vink, Kees Hoogland

Inleiding

Dit artikel is het eerste in een serie die gewijd zal zijn aan het VMBO. We hopen dat deze serie aan het einde van deze jaargang van Euclides een compleet en actueel beeld zal geven over de ontwikkelingen in het VMBO en de rol van wiskunde daarin.
Dit artikel gaat over de stand van zaken op dit moment. In volgende artikelen zal specifiek aandacht besteed worden aan diverse thema´s zoals: het praktijkonderwijs, het leerwegondersteunend onderwijs, en het verrijkingsdeel. Ook zal aandacht gegeven worden aan de trends die in het wiskundeonderwijs te signaleren zijn, zoals de toenemende aandacht voor GWA/ Praktische opdrachten, het sectorwerkstuk en het gebruik van ICT in de wiskundeles.

Waar zitten we nu?

Om de gedachten te bepalen geeft onderstaand schema wat houvast.

De leerlingen die u nu in klas 1 heeft, zijn in feite de eerste vmbo-leerlingen. Deze leerlingen zullen vanaf augustus 2001 te maken krijgen met leerwegen en sectoren en, afhankelijk van hoe het bij u op school georganiseerd gaat worden, met het leerwegondersteunend onderwijs of het praktijkonderwijs. Wellicht ten overvloede geven we nog maar even de huidige namen van de leerwegen en de sectoren.

De sectoren zijn:
– Techniek
– Economie
– Zorg en Welzijn
– Landbouw

De leerwegen zijn:
– theoretische leerweg
– gemengde leerweg
– kaderberoepsgerichte leerweg
– basisberoepsgerichte leerweg

Als we daar vanuit het vak wiskunde naar kijken dan is de situatie als volgt:
– Techniek, *wiskunde verplicht*
– Economie, *wiskunde keuzevak*
– Zorg en Welzijn, *wiskunde keuzevak*
– Landbouw, *wiskunde verplicht*

	Schooljaar 1999/2000	Schooljaar 2000/2001	Schooljaar 2001/2002	Schooljaar 2002/2003
klas 1	***			
klas 2		voorbereiden op leerwegen en sectoren		
klas 3			schoolexamen	
klas 4				schoolexamen en centraal examen

Het wiskundeprogramma

In 1993 is bij wiskunde een nieuw examenprogramma vbo/mavo C/D ingevoerd, alsmede een B-programma, dat daarmee strookte. Dit programma was een ingrijpende vernieuwing van het wiskundeonderwijs voor vbo en mavo. Bij de huidige veranderingen zien we dat het grootste deel van het programma van 1993 ook in het VMBO zal blijven bestaan. Uiteraard zijn er wel allerlei herschikkingen om passende programma's te krijgen voor de verschillende leerwegen. Inmiddels is het examenprogramma vastgesteld. In grote lijnen ziet dat er zo uit:

Kerndeel
Wi/K1 Oriëntatie op leren en werken
Wi/K2 Basisvaardigheden
Wi/K3 Leervaardigheden in het vak wiskunde
Wi/K4 Algebraïsche verbanden
Wi/K5 Rekenen, meten en schatten
Wi/K6 Meetkunde
Wi/K7 Informatieverwerking en statistiek
Wi/K8 Geïntegreerde wiskundige activiteiten

Verrijkingsdeel
Wi/V1 Aanvullende eisen
Wi/V2 Verrijkingsopdrachten

Wi/V3 Verwerven, verwerken en verstrekken van informatie
Wi/V4 Vaardigheden in samenhang

K1 tot en met K3 zijn de meer algemene vaardigheden die de leerlingen zullen moeten beheersen. K1 en K2 zijn bij alle vakken terug te vinden.
K4 tot en met K7 vormt het wiskundige hart van het programma. Daarin ziet u de bekende leerstoflijnen uit het huidige programma weer terug.
Opvallend is dat GWA als K8 nu een officiële plaats heeft gekregen in het examenprogramma.
Over de precieze invulling van het verrijkingsdeel zal later nog een artikel verschijnen.
Bent u geïnteresseerd in het volledige programma, dan is dat te vinden op www.slo.nl

Een leerling die in de theoretische of gemengde leerweg wiskunde op het programma heeft, zal alles moeten doen, zowel het kerndeel als het verrijkingsdeel.
Een leerling die in de kaderberoepsgerichte leerweg wiskunde op het programma heeft, hoeft alleen het kerndeel te doen.
De leerling die in de basisberoepsgerichte leerweg wiskunde op het programma heeft, doet ook het kerndeel met uitzondering van een aantal lastige eindtermen. De eindtermen die in de basisberoepsgerichte leerweg **niet** gedaan hoeven te worden zijn gecursiveerd.
Dat ziet er dan bijvoorbeeld zo uit:

wi/K4 Algebraïsche verbanden
(…)
5 rekenen met (woord)formules
– In een woordformule *of formule* een variabele vervangen door een getal en de waarde van de andere variabele berekenen
– onderzoeken of twee woordformules hetzelfde verband beschrijven
– *woordformules omzetten in formules waarin variabelen door één letter worden weergegeven*
– *een formule vervangen door een gelijkwaardige formule*
– *een schakeling van elementaire rekenacties omzetten in een formule en omgekeerd*
(…)

Komt het allemaal op het examen?

Het is tegenwoordig een trend om de verplichtingen voor het Centraal Examen (voorheen CSE) iets meer los te koppelen van het Schoolexamen (voorheen schoolonderzoek). Op dit moment is de praktijk zo dat de schoolonderzoeken een soort directe voorbereidingen zijn voor het schriftelijk examen: de leerlingen komen meestal alle examenstof tegen in de schoolonderzoeken. Straks in het vmbo worden aan het Centraal Examen en aan het Schoolexamen apart allerlei eisen gesteld.

Voor wiskunde ziet dat er als volgt uit:
Het Centraal Examen voor het kerndeel zal gaan over K3 (leervaardigheden), K4 (Algebraïsche verbanden), K5 (Rekenen, meten en schatten) en jaarlijks wisselend over K6 (Meetkunde) en K7(Informatieverwerking en statistiek).
Het schoolexamen zal *ten minste* gaan over K1 (Oriëntatie op leren en werken), K3 (Leervaardigheden), K8 (GWA) en jaarlijks wisselend over K7(Informatieverwerking en statistiek) en K6(Meetkunde).
En het schoolexamen moet een bijdrage leveren aan K2 (basisvaardigheden).
Vooral dat *ten minste* bij het schoolexamen moet goed verstaan worden. Uiteraard zullen in de schoolexamens, bijvoorbeeld via GWA, de andere leerstoflijnen ook gewoon aan bod komen. Veel meer echter dan voorheen zullen scholen of wiskundesecties daarin eigen keuzes mogen maken en wellicht onderdelen weglaten.

Het schoolexamen

Hierboven is al duidelijk geworden dat vooral het Schoolexamen er anders uit zal gaan zien in vergelijking met de schoolonderzoeken nu. Veel meer dan nu zal dat Schoolexamen gericht zijn op vaardigheden, GWA en praktische opdrachten. Over het algemeen zullen de activiteiten voor het schoolexamen ook niet beperkt meer worden tot het examenjaar. Zowel in het derde als in het vierde leerjaar zal daar mogelijk aan gewerkt gaan worden. Voor de theoretische, de gemengde en de kaderberoepsgerichte leerweg zal de weging van de cijfers voor het schoolexamen en voor het centraal examen $\frac{1}{2}$ om $\frac{1}{2}$ blijven. Voor de basisberoepsgerichte leerweg zal die weging $\frac{2}{3}$ om $\frac{1}{3}$ worden.

De weg naar de examens

Tot nu toe is het de gewoonte om het wiskundeprogramma zo op te bouwen dat er voor leerlingen een goede opbouw en leerlijn is van klas 1 naar klas 4, vooral gericht op het examen.
Nu het schoolexamen een wat ander karakter heeft gekregen, zal ook weer nagedacht moeten worden over een nieuwe opbouw, waarbij vooral de nieuwe eisen die gesteld worden aan het schoolexamen meegenomen moeten worden. Je zou kunnen denken aan goed doordachte leerlijnen wat betreft ICT, wat betreft praktische opdrachten en GWA en wat betreft het Centraal Examen. Daarop hopen we in een later artikel uitgebreider terug te komen.

Onderzoekend wiskunde leren

Lodewijk van Schalkwijk

Inleiding

Vanaf het schooljaar '94-'95 wordt er door de vakgroep wiskunde van de KUN jaarlijks een cursus aangeboden aan scholieren van 5 vwo, om hun de gelegenheid te bieden zich te oriënteren op een studie wiskunde of informatica. In de eerste drie jaren ging het telkens om 14 bijeenkomsten, gespreid over de maanden september tot en met mei. Sindsdien is de cursus in twee delen gesplitst, waaraan afzonderlijk kan worden deelgenomen. De leerstof heeft tot nu toe steeds te maken gehad met 'fractals' en 'dynamische processen', met van jaar tot jaar wisselende accenten. Daarbij stond telkens het doel voorop de leerlingen langs een begaanbare, efficiënte weg naar interessante stellingen en inzichten te leiden, en hen daarbij een goed beeld te geven van de deductieve structuur van wiskunde. Populair gezegd, we wilden de leerlingen vooral ook leren bewijzen.
Toen ik de gelegenheid kreeg aan deze cursus een promotieonderzoek te verbinden, heb ik mij dan ook gericht op het ontwikkelen van een didactiek van bewijzen. In dit artikel probeer ik kort de cursussen en het daaraan verbonden onderzoek te schetsen.

Het lesmateriaal

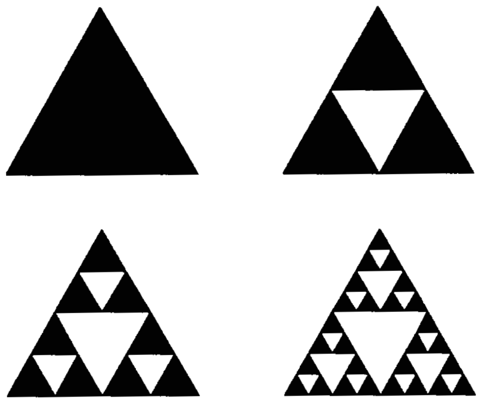
Het is niet eenvoudig om een goed beeld te geven van het lesmateriaal dat we voor de afzonderlijke cursussen hebben vervaardigd, mede omdat dit steeds in ontwikkeling was. De boeken van Devaney en Peitgen & Jürgens & Saupe hebben meestal als leidraad gediend.
Om een indruk te geven zal ik in het kort de lijn van de eerste vier lessen uit '95-'96 aangeven, gevolgd door een mooi bewijs uit les 4.

Les 1: Kennismaken met de zeef van Sierpinski (zie figuur 1) en de Cantorverzameling.
Les 2: De ternaire schrijfwijze; een algoritme voor de ternaire schrijfwijze van getallen uit $[0, 1]$.
Les 3: Samenstellen van functies, en van meetkundige transformaties zoals translaties en puntvermenigvuldigingen.
Les 4: Definitie van 'contractie' (een transformatie w van $\mathbb{R}^2$ waarbij er een getal $c \in [0, 1\rangle$ is zo, dat voor alle $a, b \in \mathbb{R}^2$ geldt:

$$\|w(a) - w(b)\| \leq c \cdot \| a - b \|);$$

definitie van 'IFS' (een systeem van meerdere contracties dat oneindig wordt geïtereerd).
Het 'Sierpinski-IFS' bestaat uit drie puntvermenigvuldigingen resp. t.o.v. $(0, 0)$, $(1, 0)$ en $(0, 1)$, elk met factor $\frac{1}{2}$. Les 4 eindigt met een bewijs dat de 'zeef van Sierpinski' invariant is onder het Sierpinski-IFS. (Zie het tekstkader op pag. 88 en 89.)

Les 1 t/m 4 preludeerden op het pièce de résistance van deze cursus dat in les 9 aan de orde zou komen: de attractorstelling van IFS-sen.
Een belangrijk hulpmiddel bij de cursussen waren de computerprogramma's 'IFS-laboratorium' en 'Funiter', speciaal ontwikkeld om de leerlingen in staat te stellen zich, experimenterend achter het beeldscherm, concrete voorstellingen te vormen bij deze abstracte begrippen.



Figuur 1

Twee didactische principes

Om de leerlingen te leren bewijzen wilden we ons niet slechts ertoe beperken de leerlingen mooie stellingen en bewijzen aan te bieden. We vonden inspiratie in constructivistische theorieën: het bewijzen moest voor de leerlingen zelf zin en betekenis hebben. Een voor de hand liggende vraag is dan: wat is een bewijs voor wiskundigen? Vaak worden hierbij drie aspecten onderscheiden:

– een bewijs is een middel om met elkaar vast te stellen of een bepaald wiskundig vermoeden waar is of niet (verificatie);
– een bewijs kan echt inzicht brengen (verheldering);
– de deductieve structuur dient om de samenhang van de stellingen binnen een gebied te doorzien (systematisering).

Het laatste aspect is voor leerlingen nog te hoog gegrepen, maar de beide andere moeten zeker tot leven gebracht worden, wanneer je wilt dat bewijzen voor hen zin en betekenis heeft.

Wij hebben bovenstaande overwegingen vertaald in de volgende *twee didactische principes*:

1 Bewijzen hoort thuis in het grotere kader van zelf wiskundig onderzoek doen, waarin de leerlingen hun eigen vermoedens formuleren en proberen die te bewijzen of te weerleggen.
2 Onderzoek doe je in een groep die zelf bepaalt of een bewijs of weerlegging afdoende is; de docenten houden zich hierbij op de achtergrond.

Het leerlingonderzoek

Mijn promotieonderzoek heeft betrekking op het leerlingonderzoek in de cursussen '95-'96 en '96-'97. Deze cursussen noem ik voortaan 'cursus 1' en 'cursus 2'. Het leerlingonderzoek in beide cursussen vond plaats in drie ronden. Bij cursus 1 was in de eerste onderzoeksronde, gedurende de lessen 2, 3 en 4, de driehoek van Pascal aan de orde geweest. Bij de eerste en de tweede ronde gingen we steeds als volgt te werk:

– Bij de introductie van het onderzoekgebied zochten de leerlingen, onder leiding (technisch voorzitterschap) van een docent, naar mogelijke verbanden. Dit noemden we de *brainstorm*.
– In de periode tussen de introductie en de daaropvolgende les probeerden de leerlingen in groepjes van twee of drie enkele van de geopperde verbanden te bewijzen of te weerleggen.
– Tijdens de volgende bijeenkomst brachten de leerlingen, weer onder leiding (voorzitterschap) van een docent, aan elkaar in een plenaire zitting verslag uit van hun inspanningen. De leerlingen konden elkaar vragen stellen en kritiek leveren op de aangevoerde argumenten. Dit was het *symposium*.
– Tenslotte maakten de groepjes van leerlingen een *schriftelijk verslag* van hun onderzoek. Dat werd de daaropvolgende bijeenkomst ingeleverd.
(Bij de derde ronde zijn we steeds enigszins van deze procedure afgeweken.)

In cursus 1 ging de tweede onderzoeksronde van start in les 5. In deze les hadden de leerlingen eerst nog wat concrete voorbeelden van itererende functiesystemen gezien (de kromme en het eiland van Koch, de varen van Barnsley) en daarna een computerpracticum gedaan over het Sierpinski-IFS. Het onderzoeksgebied van de tweede ronde betrof 'uitgebreide Sierpinski-IFS-sen'. De leerlingen kenden het Sierpinski-IFS als een samenstel van drie puntvermenigvuldigingen, alle drie met factor $\frac{1}{2}$, en met achtereenvolgens (0, 0), (1, 0) en (0, 1) als centra. Bij de uitgebreide variant was er een vierde puntvermenigvuldiging toegevoegd, met centrum (1, 1). Bovendien werden de vermenigvuldigingsfactoren vrij gelaten. Aan het begin van de brainstorm hadden we de volgende suggesties gedaan:
'Kies één uitgebreid Sierpinski-IFS en stel je daarbij de volgende vragen:
1 Zijn er punten die bij iedere stap terugkomen?
2 Zijn er lijnstukken die bij iedere stap terugkomen?
3 Zijn er vierkanten die bij iedere stap terugkomen?'

Er verschenen uiteindelijk vijf vermoedens op het bord, waaronder:

B (Vermoeden van Gemma)
Neem één van de vermenigvuldigingsfactoren $\frac{1}{4}$ en de andere drie $\frac{1}{2}$.
Dan:
éénmaal afbeelden:
oppervlakte $= 1 \times (\frac{1}{4})^2 + 3 \times (\frac{1}{2})^2 = \frac{13}{16}$
tweemaal afbeelden:
oppervlakte $= (\frac{1}{4})^2 \times \frac{13}{16} + (\frac{3}{4}) \times \frac{13}{16} = (\frac{13}{16})^2$
driemaal afbeelden:
oppervlakte $= (\frac{13}{16})^3$
viermaal afbeelden:
oppervlakte $= (\frac{13}{16})^4$
…
limietfiguur:
oppervlakte $= 0$

C (Vermoeden van Koen)
Als de vermenigvuldigingsfactoren kleiner zijn dan $\frac{1}{2}$ wordt de oppervlakte uiteindelijk 0 en zijn er geen lijnstukken meer.

Het symposium, op de volgende lesmiddag, duurde meer dan een uur. Er ontstonden discussies waaraan door veel leerlingen werd deelgenomen. Het volgende citaat heeft betrekking op vermoeden *C*.

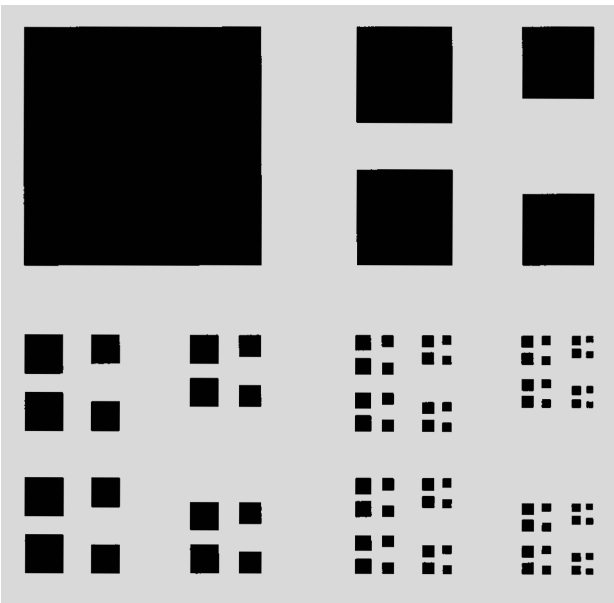
De voorzitter (D) nodigt de bedenkers van stelling *C* uit. Koen komt naar het bord.

Koen: Als de vermenigvuldigingsfactoren, …ze hoeven niet allemaal gelijk te zijn, … er moet er minstens één kleiner zijn dan een half, en de andere maximaal een half, dus ze vallen allemaal in het interval $[0, \frac{1}{2}]$, dan gaat uiteindelijk de oppervlakte van die figuur naar nul, en zijn er geen overblijvende lijnstukken meer, die dus een oppervlakte zouden kunnen hebben of een lengte. Dat is de stelling.

D: En heb je daar ook argumenten voor?

Koen: Nou je kunt het je vrij gemakkelijk voorstellen. Bij de eerste stap valt er een bepaald gedeelte van die figuur weg, en bij elke volgende stap valt er steeds meer weg, waardoor er uiteindelijk niks over zal blijven. Ik kan misschien een voorbeeld geven, een voorbeeldje laten zien?

Het licht wordt uitgedaan, en Koen laat een voorbeeld zien met behulp van het computerprogramma. Op het scherm verschijnen de volgende plaatjes:



Figuur 2

Koen: Ik zal even deze nemen met 2 keer 0,4 en 2 keer 0,3. Nou je ziet, bij deze stap, eh, dan valt hier een groot deel van de figuur weg. Bij de volgende stap valt ook in het gedeelte waar net nog hele stukken in zaten, weer een gedeelte weg. En als je dit maar lang genoeg voortzet, blijft er volgens ons geen oppervlakte meer over. … Je ziet dus dat alle stukken die aan het begin heel leken te blijven, die worden langzaam steeds verder weggeknipt. Het zal dan net zolang door gaan als dat je stappen doet, en als je maar genoeg stappen zet, dan zal de hele figuur verdwijnen, de hele oppervlakte van die figuur. Er zullen nog wel losse punten overblijven ….

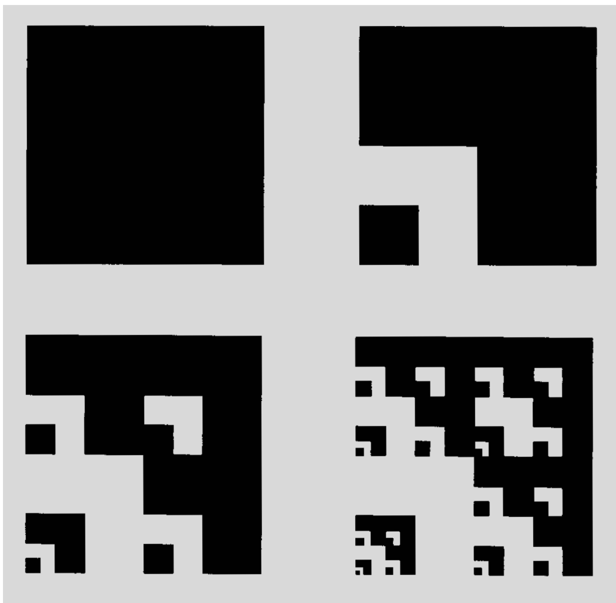
D geeft het woord aan Kees.

Kees: Is dat dan alleen als de vermenigvuldigingsfactoren kleiner dan een half zijn, of mogen ze ook een half zijn?

Koen: Ja, een half en kleiner.
Kees: Ja, wij hadden drie keer een half en één keer een vierde en wij kregen eruit dat er wel lijnstukken overbleven.

Koen: Ja, maar welk lijnstuk blijft er dan over?

Koen typt even de vermenigvuldigingsfactoren die Kees noemt in, en voert met de computer opnieuw een aantal beginstappen van de iteratie uit. Dit levert de volgende plaatjes:



Figuur 3

Vervolgens vraagt hij:

Koen: Waar blijft dan volgens jou die lijn zitten? Hierboven?

Kees: Ja die bovenste lijn, want als je..., ja die wordt dan steeds twee keer met een half vermenigvuldigd, en die vormen samen dan weer een lijnstuk van lengte één en die blijft dus steeds bestaan. En eh, ja, die puntvermenigvuldiging met een vierde, die eh, ja, die vermenigvuldigt ook zeg maar dié lijn dan, en dan ontstaat 'ie steeds ook weer in de volgende contractie, dus dan blijft er nog een lijn bestaan.

Kasper: Volgens stelling *B* blijft er geen oppervlakte over en ja, een lijn heeft toch nog altijd enige oppervlakte.

Een aantal leerlingen is het hier duidelijk niet mee eens. D geeft Jurrien het woord.

Jurrien: Ja, ik vind - ja ik doe samen met Kees - ja ik vind, een lijnstuk heeft geen oppervlakte, dus ik vind dat stelling *B* wel duidelijk blijft gelden.

Koen: Ja, *C* eigenlijk ook.

Kees: Ja, d'r blijven dus wel lijnstukken over, en dat bewijst dus dat het niet zo is (bedoelt stelling *C*).

D: Dus dat zijn twee afzonderlijke dingen, dat de oppervlakte nul wordt, en dat er lijnstukken overblijven...

Jurrien: Ja, die twee dingen hebben eigenlijk niks met elkaar te maken. Je kunt niet zeggen: 'als de oppervlakte nul is, heb ik ook geen lijnstukken'.

Koen: Nou, ik denk, een lijn heeft op zich geen oppervlakte, dus dat heeft dan inderdaad niks met elkaar te maken. Dus als er lijnstukken zijn, dan hoeft dat niet persé een oppervlakte te zijn.

Dit fragment geeft een aardig beeld van de gang van zaken tijdens een symposium. De docenten hielden zich op de achtergrond, zodat de verantwoordelijkheid voor het als waar accepteren van bewijzen bij de leerlingen kwam te liggen. De symposia waren absolute hoogtepunten. Niet alleen degenen die het aandurfden om voor de groep verslag uit te brengen van hun onderzoeksresultaten leverden een grote prestatie, maar ook degenen die kritisch luisterden en de vinger wisten te leggen op zwakke plekken in het betoog. Als cursusonderdeel waren de onderzoeksronden zeker een succes. Maar de vraag was natuurlijk: hebben de leerlingen hierdoor ook leren bewijzen?

Experimenteel en beschrijvend onderzoek

Met behulp van experimenteel onderzoek hebben we proberen vast te stellen of leerlingonderzoek in deze opzet tot verbetering in bewijzen heeft geleid. Aanvullend beschrijvend onderzoek diende ertoe voor de uitkomsten van het experimentele onderzoek verklaringen te kunnen geven. Er was een controlegroep samengesteld van 5 vwo-leerlingen, niet alleen sterk in wiskunde maar ook over de hele breedte (23 leerlingen). De harde kern van de deelnemers aan cursus 1 (15 leerlingen) vormde de experimentele groep 1. Beide groepen hebben samen voorafgaand aan de cursus een toets gemaakt, waarin bewijzen centraal stond, en na afloop weer een vergelijkbare toets. Uit dit experiment was, tot onze teleurstelling, statistisch niet vast te stellen dat de progressie in bewijzen van de experimentele groep groter was dan die van de controlegroep. Het beschrijvend onderzoek bestond uit analyses van protocollen van de brainstorms, de symposia en de onderzoeksverslagen van de leerlingen. Deze analyses brachten ons tot de veronderstelling dat de aandacht van de leerlingen tijdens de onderzoekjes onvoldoende gericht was geweest op de kwaliteit van de door henzelf geleverde bewijzen.

In cursus 2 hebben we daaraan op drie manieren proberen te sleutelen:

- We hebben nadrukkelijker naar voren gebracht dat wiskunde zich afspeelt op twee niveaus: het lagere, waar je werkt met plaatjes en leefwereldbegrippen, en het hogere, van de wiskundige, gedefinieerde, begrippen. Op het lagere niveau verwerk je ervaringen en indrukken; je ziet verbanden tussen bepaalde begrippen. Op het hogere niveau vertaal je die in uitspraken over wiskundige begrippen en probeer je deze af te leiden uit al reeds vastgestelde wiskunde.
(Deze ideeën komen voort uit de niveau-theorie van Van Hiele.)
- Buiten de onderzoekjes om is in de lessen een aantal malen aandacht besteed aan wiskundige bewijspatronen, zoals het schema om te bewijzen dat de verzamelingen *A* en *B* gelijk zijn.
- De verslagen moesten een bepaalde opzet hebben:
  - eerst het voorlopige vermoeden opschrijven, eventueel met plaatjes (het lagere niveau);
  - dan het vermoeden formuleren in wiskundige termen (het hogere niveau);

- de wiskundige voorkennis die voor het bewijs van belang was, in een rubriekje bij elkaar zetten (de 'locale ordening');
- ten slotte het bewijs of de weerlegging geven.

Ook aan de harde kern van cursus 2 (15 leerlingen) hebben we een voortoets en een natoets afgenomen. Deze groep scoorde wèl significant hoger dan de controlegroep. En in het beschrijvend onderzoek kwamen er nu wèl momenten naar voren waarin de leerlingen met elkaar in discussie waren over de kwaliteit van een bewijs. Je zou gaan geloven dat de aangebrachte correcties tot resultaat hebben geleid.

Reflecties tot slot

Wat zijn de resultaten uit dit onderzoek nu waard? Je kunt zeggen dat er ook bij didactisch onderzoek sprake is van een lager en een hoger niveau. Op het lagere niveau beweeg je je dicht bij de praktijk, je vermoedt verbanden, je verzamelt bewijsmateriaal dat je vertrouwen in die verbanden versterkt. Pas wanneer je vermoedens uitgekristalliseerd zijn kun je gaan proberen een definitief bewijs te leveren, bijvoorbeeld door een grootschalig experimenteel onderzoek. Zover zijn we echter nog lang niet, als het om didactiek van leren bewijzen gaat. Mijn onderzoek speelt zich af op het lagere niveau. Het laat zien dat de twee didactische principes die ik eerder heb genoemd, kunnen bijdragen aan een verfrissende aanpak bij het leren bewijzen. De grote plaats die praktische opdrachten in het nieuwe curriculum voor de bovenbouw hebben gekregen, biedt ruimte voor vervolgexperimenten hiermee. Ik denk dat er nog veel meer onderzoek op het lagere niveau van didactiek moet plaatsvinden, voordat het hogere niveau in zicht komt. Er zou sowieso veel meer lager-niveau-onderzoek, bij voorkeur door leraren zelf, verricht moeten worden. Zou het niet een aardig idee zijn voor de minister, jaarlijks een aantal beurzen beschikbaar te stellen om leraren die al enige jaren lesgeven en een goed onderzoeksplan hebben, in de gelegenheid te stellen te promoveren?

UNILO, Universitair instituut voor de lerarenopleiding, KUN
Postbus 9103
6500 HD Nijmegen
Tel.: 024 3611572
Email: L.vanSchalkwijk@unilo.kun.nl

Referenties

Devaney, Robert L., 1990
Chaos, Fractals and Dynamica
ISBN 90-6789-334-X, Addison-Wesley.

Kamerich, Ernic
Iteration and fractals for gifted high school pupils
in een komend nummer van Nieuw Archief voor Wiskunde. (Hierin komt de leerstof uit de cursussen uitvoerig aan de orde.)

Peitgen, Heinz-Otto & Jürgens, Hartmut & Saupe, Dietmar, 1991
Fractals for the Classroom
ISBN 0-387-97041-X, Springer Verlag.

Schalkwijk, L.T.J.M. van, 1998
Onderzoekend wiskunde leren
ISBN 90-9011703-2, uitgegeven in eigen beheer.
Vrij opvraagbaar via de homepage van de Universiteitsbibliotheek van de KUN: www.kun.nl/ub/ , vervolgens aanklikken 'Webdoc', gevolgd door 'Elektronische publicaties KUN'.
Kies nu 'Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica'. Door de juiste titel aan te klikken, kunt u het proefschrift downloaden (240 pagina's).

Het computerprogramma 'Funiter' kan vanaf 1 april 1999 worden gedownload: http://www.xs4all.nl/~stijnw

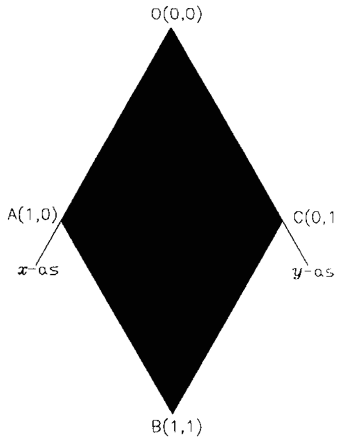
(Uit les 4, cursus '95 - '96)

7 De zeef van Sierpinski is invariant onder het Sierpinski-IFS.

In paragraaf 3 van deze les heb je gezien dat ieder stadium S_n in het constructieproces van S verkregen kan worden door n keer het Sierpinski-IFS w_S te itereren op S_0, een gevulde gelijkzijdige driehoek. Dus:

$$S = \bigcap_{n=0}^{\infty} w_S^n(S_0)$$

Met het computerprogramma IFS Laboratorium heb je kunnen vaststellen dat ook wanneer je begint met andere verzamelingen dan S_0, bij herhaald toepassen van w_S de beelden steeds meer op de tussenstadia S_n gaan lijken. In deze paragraaf kiezen we als startverzameling een gevulde ruit OABC met hoeken van 60° en 120°. We noemen deze ruit R_0. Zo'n ruit kun je maken door S_0 te spiegelen in een van zijn zijden. We tekenen coördinaatassen langs twee van de zijden van de ruit, zó dat de de hoekpunten O, A, B en C respectievelijk de coördinaten (0,0), (1,0), (1,1) en (0,1) krijgen. (Zie afbeelding hiernaast)

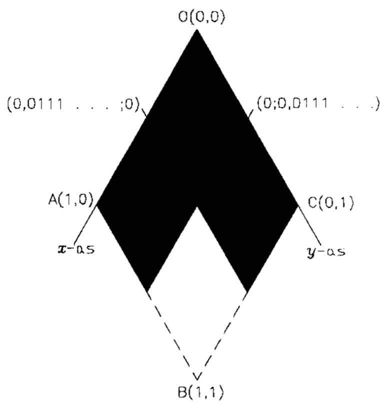


Een ruit als startverzameling voor het Sierpinski-IFS.

Het Sierpinski-IFS w_S bestaat uit de drie puntvermenigvuldigingen w_O, w_A en w_C, respectievelijk met centrum O, A en C, telkens met factor ½. Vanwege deze vermenigvuldigingsfactor ligt het voor de hand om nu voor de notatie van getallen gebruik te maken van het tweetallig stelsel.

Opgave 7.1 Geef voor elk van de volgende puntverzamelingen een vergelijking.
a lijn OA; **b** lijn AB; **c** lijn AC; **d** lijn OC.

In het tweetallig stelsel (maar ook in andere talstelsels, zoals het drietallig of het tientallig stelsel) zijn er voor sommige getallen twee verschillende namen. In plaats van 1, of eigenlijk 1,000 . . . , kun je ook 0,111 . . . schrijven; en in plaats van 0,1000 . . . ook 0,0111 . . . . Getallen die in de binaire schrijfwijze een naam met een 0-staart hebben, hebben ook een naam met een 1-staart.
We kunnen nu de punten van R_0 als volgt karakteriseren: het zijn precies die punten van $\mathbb{R}^2$ waarvan beide coördinaten, x en y, een tweetallige naam hebben die begint met 0, .
Door op R_0 het Sierpinski-IFS toe te passen krijgen we R_1 , een deelverzameling van R_0.

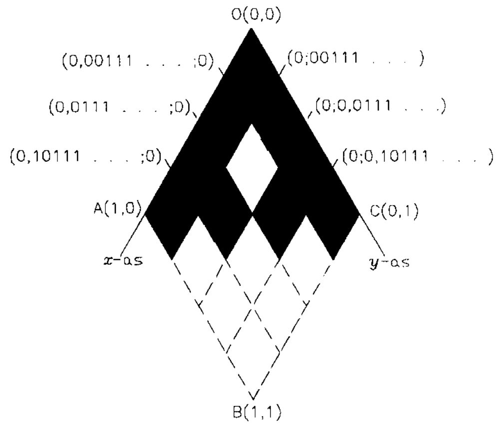


$R_1 = w_S(R_0)$

Opgaven
7.2
a Wat kun je zeggen over de coördinaten van de punten van R_0 die níet tot R_1 behoren?
b Hoe kun je nu de punten van R_1 karakteriseren?

7.3 Bewijs: $S_1 \subseteq R_1$.

7.4 R_2 ontstaat door w_S toe te passen op R_1 .
a Welk kenmerk hebben de coördinaten van de punten van R_0 die niet tot R_2 behoren?
b Hoe kun je de punten van R_2 karakteriseren?
c Bewijs: $S_2 \subseteq R_2$.
d Hoe kun je de punten van R_n karakteriseren?
e Bewijs: $S_n \subseteq R_n$.



$R_2 = w_S^2(R_0)$

7.5
a Bewijs: Voor alle $n \in \mathbb{N}$: $R_{n+1} \subset R_n$

We definiëren R als volgt: $R = \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n$

b Hoe kun je de punten van R karakteriseren?

7.6 Bewijs: $S \subseteq R$.

7.7
a Gegeven is een punt $P(0{,}101101;\ 0{,}0100101)$. Bepaal nu respectievelijk de coördinaten van $w_O(P)$, $w_A(P)$ en $w_C(P)$.
b Bewijs: $w_S(R) = R$. (In woorden: Bewijs dat R invariant is onder het Sierpinski-IFS.)

7.8
a Bewijs: $R \subseteq S_0$.
b Bewijs: $R \subseteq S_1$.
c Bewijs: Voor elke $n \in \mathbb{N}$: $R \subseteq S_n$.
d Bewijs: $R \subseteq S$

7.9 Bewijs: $S = R$.

Daarmee is de redenering voltooid. We kunnen nu de punten van de zeef van Sierpinski op een eenvoudige manier karakteriseren. Bovendien hebben we bewezen dat de zeef van Sierpinski *invariant* is onder het Sierpinski-IFS. Later in deze cursus (les 7) zullen we van dit belangrijke resultaat gebruik maken om te bewijzen dat S de 'attractor' is van het Sierpinski-IFS, dat wil zeggen dat herhaald toepassen van dit IFS op welke startfiguur ook, resulteert in figuren die 'steeds beter' op S gaan lijken.

7.10 Karakteriseer de punten van S met behulp van de binaire schrijfwijze van de coördinaten.

Honderd jaar wiskunde-onderwijs (3)

De wederwaardigheden van een schoolvak

In een boek over honderd jaar wiskundeonderwijs wordt natuurlijk vaak omgezien om een blik in het verleden te werpen. Maar in een dergelijk werk dient ook het heden, al is het alleen maar voor het nageslacht, niet vergeten te worden. Om een beeld te schetsen van hetgeen wiskundeleraren aan het eind van de twintigste eeuw bezighoudt, heeft Fred Goffree een middag en een deel van de avond (1 juni 1999) doorgebracht met 5 wiskundeleraren uit het voortgezet onderwijs. Of de 5 collega's alle anderen in Nederland kunnen representeren, is moeilijk te zeggen. De diversiteit is evenwel in grote mate wel vertegenwoordigd. Ze verschillen in elk geval in leeftijd, sekse, vooropleiding, werkindeling, klassen, landstreek, schooltype en positie op school. Maar op die eerste juni hadden ze ook iets gemeenschappelijks. De meesten hadden net een lange examenperiode op school afgesloten met een korte en zonnige meivakantie. Op internet en in de dagbladen was in het bijzonder het examen wiskunde-A in de aandacht geweest, evenals de discussie over de tweede fase met Studiehuis en veel aandacht voor zelfstandig leren. Vragen in de onderwijscommissie van de Tweede Kamer hadden nog niet zo lang geleden geleid tot een maatregel van staatssecretaris Adelmund om het examenprogramma voor wiskunde enigermate te verlichten. Natuurlijk houden dergelijke zaken wiskundeleraren bezig. Maar er zijn nog wel wat meer dingen te doen. In het gesprek komt daar het een en ander van over tafel. Ook vanzelfsprekend de realistische wiskunde, uitgevonden, onderbouwd en ingevuld op het Freudenthal Instituut. En inspirerend voor heel wat leraren, al zijn er ook nog wel die zich (zover dat nog mogelijk is) afwachtend opstellen en soms zelfs kritische geluiden laten horen. Wie dit hoofdstuk straks in het Jubileumboek leest, zal het opvallen dat de details van de 'inhoud' van het schoolvak wiskunde niet veel in het gesprek naar voren worden gebracht. Wat bedoeld wordt met het schoolvak wiskunde? Niet alleen de leerstof natuurlijk, ook de beoogde doelen en de didactiek om met de gegeven leerstof die doelen te bereiken. Opmerkelijk is dat de didactiek, die wel ter sprake komt, van algemene aard is: samenwerken, zelfstandig werken, leren leren. Dat was in vroegere tijden wel anders. In een ander hoofdstuk, 'Leraren over hun didactiek' (ook van Fred Goffree), ziet de lezer een ontwikkeling van voornamelijk leerstofdenken (wiskundeonderwijs in de 'geest van de wiskunde') naar meer vakdidactisch denken. Dit hoofdstuk gaat niet verder dan 1968, het jaar van de mammoetwet en de moderne wiskunde in het leerplan wiskunde. Het lijkt erop dat alle werkzaamheden tot dan, onder meer van de Wiskunde Werkgroep van de WVO (waaraan het hoofdstuk 'Didactische pioniers' van Ed de Moor is gewijd) en de Wimecos-commissie (die in 1958 met een didactisch doordacht nieuw leerplan voor wiskunde kwam) in de vergetelheid raken. De 'New Math' komt over als nieuwe leerstof die tegelijkertijd een nieuwe didactiek inhoudt. Is bijvoorbeeld met de transformatiemeetkunde al dat intuïtieve gedoe met verplaatsingen en omklappingen van driehoeken bij de congruentiebewijzen niet prachtig uit de wereld geholpen? In diverse hoofdstukken zijn de wederwaardigheden van het schoolvak wiskunde gedurende de afgelopen 100 jaar vanuit verschillende invalshoeken te volgen. De algebra in het hoofdstuk 'De erfenis van al-Khwarizmi' (Martin Kindt), meetkunde in 'Lengte wordt breedte' (Aad Goddijn), infinitesimaalrekening in 'Dien overgelijkelijken stap vooruit' (Harm Jan Smid), de titel van het hoofdstuk 'Kansrekening en statistiek' (Bert Zwaneveld) spreekt voor zichzelf en 'Van schrapkaart tot internet' (Guus Vonk en Michiel Doorman) roept vast ook de goede beelden op. In 'Honderd jaar leerplanwijzigingen' (Wim Groen) kan men het geheel nog eens, van een 'macro-standpunt' dit keer, overzien.

De redactiecommissie van het Jubileumboek.

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Van de bestuurstafel

Van de HBO-werkgroep

Zeer recent is de NVvW versterkt met een werkgroep van wiskundedocenten, werkzaam in het HBO. Daaraan vooraf ging een conferentie in januari (1999), georganiseerd door een groep enthousiastelingen onder auspiciën van de NVvW waaraan werd deelgenomen door zo'n 150 HBO-docenten. Dit is werkelijk een representatief aantal. Het was voor het eerst dat een conferentie plaatsvond voor uitsluitend wiskundedocenten uit het HBO. Een van de redenen van de grote opkomst was dat de wiskunde in het HBO als zelfstandig vak in de knel dreigt te komen door introductie van projectonderwijs en probleemgestuurd onderwijs. Een van de conclusies van deze conferentie (te vinden in het verslag op de website van de NVvW) is dat de wiskundedocent niet lijdzaam moet afwachten welke invloed onderwijskundige veranderingen op zijn vak hebben, maar zelf het initiatief moet nemen om 'zijn' vak onder te brengen in projecten. En dat hij ook zelf moet werken aan de vertaling van de eindtermen van de opleiding, waaraan hij als docent verbonden is, naar zijn vak. Dat vereist een brede kijk op het toepassingsgebied van de wiskunde, maar voor een HBO-docent dient dat eigenlijk vanzelfsprekend te zijn.

Op dezelfde conferentie werd gesuggereerd dat, wanneer computeralgebra (MAPLE, Derive, et cetera) op verantwoorde wijze wordt gebruikt, het imago van de wiskunde in het HBO sterk verbeterd kan worden. Met name in de sector techniek kan de wiskunde daarbij een voorbeeldfunctie voor andere vakken vervullen.

Met de uitkomsten van de conferentie is een NVvW-werkgroep van start gegaan met als hoofddoel het belang van de wiskunde als zelfstandig vak in het HBO te versterken en daarmee de positie van de docent te bevestigen. Deze werkgroep is samengesteld uit docenten afkomstig uit alle sectoren in het HBO. Metha Kamminga is voorzitter van deze werkgroep, zij zal op de jaarvergadering voor een bestuursfunctie worden voorgedragen. Enkele korte-termijn-doelen van deze werkgroep zijn:

a. De wiskunde en wiskundedocenten uit het HBO in kaart brengen.
b. Onderzoeken van het hoe en waarom van het bestaansrecht van wiskunde in verschillende HBO-sectoren als zelfstandig vak.
c. Didactiseren van computeralgebra.
d. Het organiseren van een tweede conferentie om daarmee in 2000 een vervolg te geven aan de conferentie van januari 1999, maar nu ook met internationale inbreng.

Marian Kollenveld

Wereldwiskunde Fonds ondersteunt conferentie van wiskundeleraren in Mozambique

SofMat 98

Gerben van Lent [1)]

O Sofmat 98 é organizado pelo Departamento de Matemática da Universidade Pedagógica Beira. Apoiado pela Direcção Provincial da Educação de Sofala e por um fundo chamado "Wereldwiskunde Fonds" de Associação holandesa de professores de matemática "Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren".

Zo stond het Wereldwiskunde Fonds vermeld in de uitnodiging voor de tweede SofMat conferentie voor wiskundeleraren in de provincie Sofala in Mozambique in Zuidelijk Afrika. Deze conferentie werd georganiseerd door de wiskundeafdeling van de pedagogische universiteit in Beira in samenwerking met wiskundeleraren uit de provincie Sofala. Het doel van de conferentie was bijscholing en uitwisseling van informatie over het wiskundeonderwijs.

Hoe is Sofmat 98 voorbereid?

Nadat de begroting rond was, mede door de toezegging van ongeveer 8000 gulden door het Wereldwiskunde Fonds, konden de voorbereidingen beginnen. Hiertoe waren in een eerder stadium al contacten gelegd met scholen in Beira en in de provincie om uit te zoeken wat docenten interessante thema's vonden. Daarnaast kwam de wiskundeafdeling van de universiteit nog met een paar thema's onder andere geïnspireerd door het bezoek van twee medewerkers aan een conferentie over wiskundeonderwijs in Portugal.
Dit leverde het volgende rijtje thema's op:

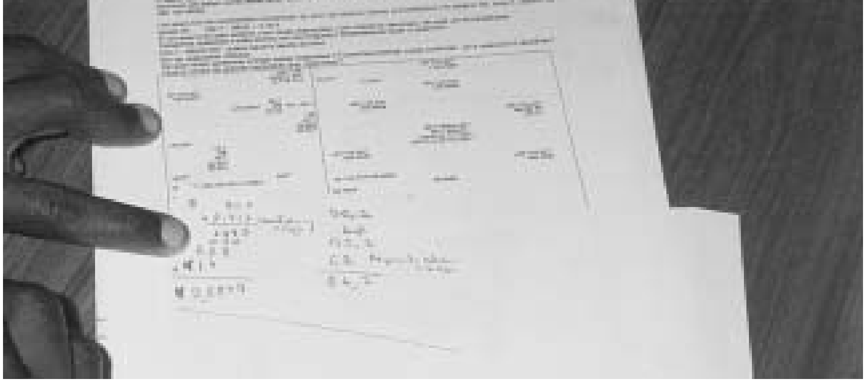
- gebrek aan oefenstof over numerieke uitdrukkingen in klas 7 [2)];
- typische fouten van leerlingen;
- het interpreteren van grafieken;
- de introductie van negatieve getallen in klas 8;
- wat is een betere volgorde: eerst kwadratische vergelijkingen behandelen en dan de constructie van grafieken van kwadratische functies of omgekeerd?
- hoe moet de meetkunde behandeld worden in klas 6, er is weinig oefenstof en leerlingen en leraren vinden het moeilijk: *'Moet bij de omtrek van een halve cirkel de diameter meegerekend worden?'*;
- hulpmiddelen bij de wiskundeles;
- het kansbegrip.



Sofmat 98, een ooggetuigenverslag

Honderd leraren, een kleine veertig uit de districten en de rest uit Beira, hebben zich in juni 1998 gedurende twee dagen beziggehouden met bovengenoemde thema's.

Voor het verloop van de bijeenkomsten laat ik voornamelijk Arie Rijkeboer aan het woord. Hij was de projectaanvrager, is verbonden als docent aan de universiteit van Beira, en was medeorganisator van de conferentie.
Na de officiële opening begon men met het thema over numerieke uitdrukkingen.





'Leraren missen in het huidige schoolboek uitdrukkingen als

$$56 \div \{ 10 - [\frac{1}{8} + (1 - \frac{1}{8}) \times \frac{1}{5}]\}$$

Zij vinden dit soort opgaven prima, omdat leerlingen - om deze opgave goed te maken - zich grondig moeten voorbereiden. Zij moeten tafels herhalen en eigenschappen van bewerkingen. Het huidige leerboek heeft wel een aantal opgaven over numerieke uitdrukkingen, bijvoorbeeld van de vorm $(92{,}7 - 68) \times 2{,}407$.'

Deze uitdrukking was aan 47 leerlingen van twee scholen voorgelegd. Het resultaat: 37 verschillende antwoorden variërend van 1,6849 tot 21149214. Tijdens de conferentie bespraken de deelnemers het resultaat van dit onderzoekje.

' Hoe moet je dit nu nakijken? "Ze moesten de tafels eens goed leren", was de eerste reactie. Maar ook werd er dieper ingegaan op het gebrek aan écht begrip voor wat decimale breuken en gewone breuken zijn. Men maakte hierbij onder andere gebruik van gegevens afkomstig van een enquête en interviews die op een van de scholen waren gehouden.
Een vraag die op de conferentie ook veel reacties bij de deelnemers opriep was: hoe breng je leerlingen aan het verstand dat 0,94 × 0,81 niet gelijk is aan 7,614 maar aan 0,7614.'

"Tel de cijfers achter de komma" vonden de meesten een goed hulpmiddel. "Hoe kan een product van twee getallen kleiner dan 1 een getal groter dan 1 opleveren?" vonden sommigen ook een goede vraag om leerlingen kritisch te laten kijken naar hun antwoorden.
Het thema typische fouten werd in werkgroepvorm gepresenteerd. Per groepje kregen de deelnemers voorbeelden van vragen met foute leerlingenantwoorden. De bedoeling was om de voorbeelden eerst per groep te bespreken en daarna plenair te rapporteren. Een opdracht voor een werkgroep was bijvoorbeeld: hoe komt een leerling bij het oplossen van de vergelijking

$$\frac{x-1}{x} = \frac{1}{2}$$

aan het antwoord

" $x = \pm\sqrt{-1}$, dus bestaat niet"

en hoe moet je met zo'n antwoord omgaan?

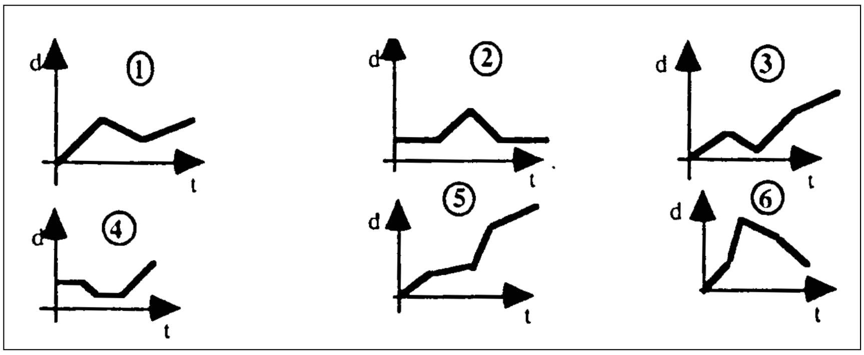
Dit onderwerp vormde het slot van het ochtendprogramma.

In de middag volgde om te beginnen een lezing over het kunnen interpreteren van grafieken. Als introductie presenteerde men het resultaat van een onderzoekje waarbij aan leerlingen was gevraagd de juiste snelheidsgrafiek aan te wijzen van een jongen die op zijn fiets over een heuvel naar school moet. (zie figuur)

Veel leerlingen kozen voor nummer 2 en slechts een enkeling kwam met het juiste antwoord. De spreker wilde benadrukken dat voor een beter begrip van grafieken niet alleen aandacht gegeven moet worden aan standaardgrafieken, maar ook aan grafieken zoals ze in de dagelijkse werkelijkheid voorkomen. Hoewel in Mozambikaanse kranten zelden een grafiek wordt aangetroffen.

Het volgende thema was de introductie van negatieve getallen in klas 8.

'Jan Draisma (verbonden aan de pedagogische universiteit) *stelde dat men nog heel weinig wist over hoe je negatieve getallen pedagogisch-didactisch het beste kunt invoeren, en dat het een beetje dwaas is in een land als Mozambique te werken met een temperatuurvoorbeeld. De stemming zat er zo langzamerhand goed in en er kwamen vele suggesties, bijvoorbeeld: leraren die voor de term +4 hun leerlingen vier passen vooruit laten doen, en voor de term –5 vijf passen achteruit. Ver-*





volgens kwam de kwestie naar voren, hoe je kinderen duidelijk moet maken dat een product van negatieve getallen een positief getal oplevert. Hier kwam niemand met een goede suggestie, maar de deelnemers kregen de troost mee dat het probleem van negatieve getallen historisch gezien óók geen eenvoudige zaak geweest is.'

Het hoogtepunt van de eerste dag werd gevormd door het debat over: wat is een betere volgorde: eerst kwadratische vergelijkingen behandelen en dan de constructie van grafieken van kwadratische functies of omgekeerd (zoals het in het curriculum staat)?

Eerst werden voorstanders van het afwijkende standpunt uitgenodigd hun mening toe te lichten.

'Als je de nulpunten kent, weet je zo de top en kun je de grafiek tekenen. Als de functie onverhoopt geen nulpunten heeft, gebruik je de formule voor de top en nog een tabel met wat punten, allemaal heel eenvoudig. Dat gedoe met translaties enzovoort is allemaal veel te ingewikkeld. Waarom moeilijk doen als het makkelijk kan?'

De twee inleiders hadden van tevoren een onderzoek gedaan: een aantal klassen waarin de officiële volgorde was gehanteerd werd vergeleken met klassen waar de volgorde was omgedraaid. Hoe tekenden de leerlingen de grafieken van kwadratische functies?

'Het resultaat was verbluffend: de leerlingen uit de eerste groep deden het veel beter dan de leerlingen uit de tweede groep. Bovendien gebruikten leerlingen uit de tweede groep bijna niet de methode die door hun leraar was gepropageerd. Zij beperkten zich in meerderheid tot eenvoudige tabelletjes met functiewaarden.'

Als afsluiting gaven de inleiders nog een uiteenzetting over kwadraat afsplitsen en de methode van translaties.
De tweede dag begon met de bespreking van de meetkundeproblematiek in klas 6 en klas 7. Naast de vraag over de omtrek van de halve cirkel werden er nog veel meer meetkundeproblemen aangekaart. Leraren werden uitgenodigd om met oplossingen te komen en met suggesties voor bespreking in de klas.

Daarna ging het verder met een zogenaamd laboratorium van de wiskunde. Een deel van de leraren kon kennismaken met het gebruik van computers voor de wiskunde (-les).

' *Leraren uit de districten gingen een kijkje nemen bij de computers van de universiteit. Hier kregen ze van de begeleiders te zien wat voor mogelijkheden je hebt met programma's als Mathematica en Matlab. Ze kunnen zich dan een voorstelling maken hoe in een verre toekomst het onder-*





wijs zich zou kunnen ontwikkelen. Overigens heeft Amerika al aan een paar scholen met bovenbouwklassen computers gegeven met Internetaansluiting.'

Het andere deel van de leraren hield zich bezig met het nut van ruitjespapier (nog weinig gebruikt) en mogelijkheden van Tangram en van deksels van verpakkingen van bijvoorbeeld melkblikken bij de trigonometrielessen.

Vervolgens kwam de kansrekening aan bod. Slechts een minderheid van de conferentiedeelnemers heeft zelf ooit formeel les gehad in kansrekening, maar men had toch een redelijke kennis van dit onderwerp. De inleider presenteerde veel Afrikaanse spelletjes om te illustreren waar het kansbegrip zoal een rol speelt.

De conferentie werd afgesloten met een plenaire sessie en daarna een diner voor alle deelnemers. De deelnemers waren tevreden over deze conferentie en zouden graag een vervolg zien. Dit zou dan misschien buiten Beira kunnen worden gehouden. Op de afdeling wiskunde van de pedagogische universiteit willen ze verder werken aan lesmateriaal over negatieve getallen en grafieken van kwadratische functies en daarnaast aan de vele suggesties die op deze conferentie door de deelnemers naar voren zijn gebracht.

Wereldwiskunde Fonds gaat onverdroten verder

Voor het fonds was het spannend om voor het eerst een dergelijk project te ondersteunen in plaats van geld voor de aanschaf van boeken te doneren. Temeer omdat de voorbereiding en organisatie van een dergelijke conferentie in Mozambique de organisatoren enorm veel inspanning kostte. Dit leidde tot enig uitstel wat de gemoedsrust van de fondsleden op de proef stelde. Niettemin hopen wij dat de donoren aan het Wereldwiskunde Fonds onze mening delen dat onze bijdrage aan dit project een goede verbreding is van het soort projecten dat het Wereldwiskunde Fonds wil ondersteunen. Inmiddels is ook het volgende project al weer bijna afgerond. Hier gaat het wel weer om de ondersteuning bij de aanschaf van boeken, maar nu meer als referentiemateriaal en... voor het eerst in een project buiten Afrika en wel in Bhutan in Azië. Wij hopen u hier binnen afzienbare tijd verslag van te kunnen doen en intussen zijn we al weer druk bezig met het uitzoeken van het volgende project.

Noten

1 Gerben van Lent is secretaris van het Wereldwiskunde Fonds

2 Het onderwijssysteem van Mozambique ziet er als volgt uit:

klas 1 - 5	lager basisonderwijs
klas 6 - 7	hoger basisonderwijs (men rekent dit al tot 'secondary school') afgesloten met examen
klas 8 - 10	eerste cyclus 'general secondary education' afgesloten met examen
klas 11 - 12	tweede cyclus 'general secondary education' afgesloten met examen

Voor toelating tot een universiteit, technisch of commercieel instituut moet de leerling eerst nog een toelatingsexamen doen.



bespreking

H. Poincaré
Een nacht vol opwinding
'Een keuze uit de filosofische essays'
vertaald door D. Eringa, inleiding door F. Verhulst
Epsilon Uitgaven Utrecht, ISBN 90-5041-048-0
152 blz., prijs ƒ 27,50

'Vaak begrijpen mensen elkaar niet, omdat ze niet dezelfde taal spreken en er talen zijn die men niet kan leren'. Hoewel Henri Poincaré (1854-1912) de auteur is van de hierboven geciteerde uitspraak, kan men hem zelf er niet van betichten alleen gesproken te hebben voor een zo select mogelijk publiek. In de onlangs verschenen uitgave van Epsilon Uitgaven die hier ter recensie voorligt, is duidelijk dat Poincaré zich tot doel stelde een heel wat breder terrein dan alleen een publiek geïnteresseerd in wiskundige hoogtepunten en fijnproeverij te bedienen. Poincaré, in de inleiding van Ferdinand Verhulst een van de laatste universele geleerden genoemd, was thuis op vele fronten. Hij publiceerde op het gebied van de zuivere en de toegepaste wiskunde, hij werkt als docent aan de Parijse universiteit binnen diverse disciplines: fysische en experimentele fysica, mathematische fysica, waarschijnlijkheidsleer, hemelmechanica, algemene sterrenkunde, theoretische elektriciteitsleer zijn slechts voorbeelden van zijn intellectuele diversiteit. Bovendien, maar dat terzijde en alleen maar als een verdere illustratie van zijn veelzijdigheid, schreef hij op dertienjarige leeftijd een drama in vijf bedrijven over Jeanne d'Arc.
Zoals de ondertitel van 'Een nacht vol opwinding' al aangeeft is hier sprake van een selectie van Poincaré's filosofische essays, want ook op dat terrein heeft Poincaré zich niet onbetuigd getoond. Zijn belangrijkste werk op het terrein van de filosofie is verzameld in vier boeken, te weten 'La science et l'hypothèse' (1902), 'La valeur de la science' (1905), 'Science et méthode' (1908) en 'Dernières Pensées' (1913). Er zijn negen verschillende essays in dit boekje gebundeld. Ze zijn, als ik Ferdinand Verhulst als inleider weer mag citeren, bedoeld als smaakmaker voor het volledige werk. Zo zijn de eerste twee essays 'De toekomst van de wiskunde' en 'De uitvinding in de wiskunde' opstellen "waarin wordt nagegaan hoe de wiskundige komt tot de keuze van feiten die hij gebruikt en hoe verwacht kan worden dat de toekomst van de wiskunde er uit ziet". In het tweede essay 'De uitvinding in de wiskunde' geeft hij aan de hand van voorbeelden rond de totstandkoming van zijn eerste artikel over de Fuchs-achtige functies een verhelderende inkijk in wat Poincaré zelf noemt de ziel van de wiskundige. Hij beargumenteert daarin dat het onbewuste minstens een even grote rol speelt in de ontwikkeling van wiskundige theorieën als het bewuste. Verder treffen we de essays getiteld 'Wiskundige definities en onderwijs', 'Toeval', 'Over de aard van wiskundig redeneren', 'Wiskundig concept en ervaring', 'Intuïtie en logica bij wiskunde' en 'De evolutie van de wetten' aan.
In 'Wiskundige definities en onderwijs' gaat Poincaré in op het zeker voor docenten in het wiskundeonderwijs vaak zo frustrerende gegeven dat "er zoveel nadenkende mensen zijn die het vertikken iets van wiskunde te begrijpen". Uiteraard is ook hij niet in staat aan te geven hoe dit probleem, dat kennelijk ook al rond de vorige eeuwwisseling een grote rol speelde in het onderwijs, moet worden opgelost, maar in de loop van zijn betoog worden verschillende lucide gedachten geopperd waar ook de hedendaagse docent door geprikkeld kan raken. Bovendien definieert hij en passant ook het belangrijkste doel van het wiskundeonderwijs, namelijk het ontwikkelen van bepaalde eigenschappen van de menselijke geest. Bij deze te ontwikkelen eigenschappen wijst hij de intuïtie aan als een van de meest waardevolle, geheel in lijn met het hieraan voorafgaande essay. Ook vergeet hij niet te wijzen op het belang van het aanbrengen van enige historische lijn in het wiskundeonderwijs. Poincaré betoogt dat men vooral niet te vroeg in de wiskundige ontwikkeling van een leerling moet beginnen met wiskundig zuivere concepten. Pas als de leerling vertrouwd is geraakt met wiskundig redeneren, dan zal diens geest open staan voor een dergelijke benadering. In het kader van de ontwikkeling van het nieuwe meetkunde-programma binnen vwo-B 1,2 kan zijn standpunt wel eens aardig up-to-date blijken te zijn…
Al met al beslaat ook deze bundel, zoals Poincaré's hele œuvre, een breed scala aan wiskundige onderwerpen. In andere essays wordt het belang van wiskundige inductie benadrukt, dan wel het wiskundig continuüm opgebouwd uitgaande van het fysisch continuüm. Af en toe duikt er eens een onderwerp op dat in meer dan een essay aan de orde gesteld wordt, maar meestal is een volgend essay weer voorzien van een nieuw en sprankelend thema. Al met al is deze bundel, los van de mogelijke kritiek dat de bundel niet duidelijk maakt waarom gekomen is tot precies deze selectie, een heel aangename invalshoek om te komen tot enig inzicht in de denkwereld van een groot wiskundige. Hoewel je je kunt afvragen of de 'algemeen wetenschappelijk geïnteresseerde' (de doelgroep die de uitgever zich kennelijk, getuige de achterflap van het boek, voor ogen stelt) zich iets kan voorstellen bij de wiskundige voorbeelden die Poincaré door al zijn opstellen strooit.

Ger Limpens

5de Mathematische Modelleercompetitie Maastricht 1999

Jacob Perrenet

Inleiding

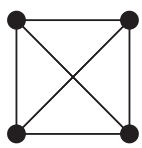
Op zaterdag 23 januari 1999 vond de vijfde Mathematische Modelleercompetitie Maastricht plaats. De wedstrijd werd georganiseerd door medewerkers van de opleiding Kennistechnologie en medewerkers van de opleiding Econometrie van de Universiteit Maastricht. Twee uur lang bogen 93 scholieren zich in teams over vijf opgaven. De deelnemers waren vijfde- en zesdeklassers vwo, afkomstig van 17 scholen uit Nederland en België. Er waren totaal 23 teams. Bijna de helft van het aantal deelnemers kwam uit België. De begeleidende leerkrachten werden onthaald op een aantal lezingen over onderwerpen uit de Econometrie en de Kennistechnologie, gegeven door docenten van deze beide exacte opleidingen van de UM. Achtereenvolgens passeerden de revu: de geschiedenis van het computerschaak, bimatrixspelen (een onderwerp uit de speltheorie, over spelers, keuzen, uitbetalingen, strategieën en evenwichten), exact en symbolisch rekenen met Mathematica en wiskunde op het Internet.
De wedstrijd werd deze keer door een 'thuisclub' gewonnen: het Montessori College uit Maastricht met als teamleden Marijn Schouten, Yvo Keuter en Brian Pauw. De tweede prijs was voor het St. Aloysiuscollege uit Geel (België). Op de derde plaats eindigde de Stedelijke Humanoria uit Dilsen (België) gedeeld met het Theresia Lyceum uit Tilburg.
Hieronder geven we eerst de vijf opgaven en daarna beschrijven we globaal de oplossingen en de resultaten.

De opgaven

Opgave 1: Telecommunicatie
Het telecommunicatiebedrijf RAMCA is een Belgisch-Nederlandse alliantie op de telecommunicatiemarkt welke zich heeft gespecialiseerd in mobiele telecommunicatie in het grensgebied van Nederland en België.

RAMCA wil een nieuw telecommunicatienetwerk aanleggen in het grensgebied tegen minimale kosten. RAMCA heeft besloten om het grensgebied op te splitsen in 4 regio's (Eindhoven, Genk, Hasselt, Maastricht), en in elke regio een centrale te plaatsen welke het telecommunicatieverkeer binnen de regio kan verwerken. Voor communicatie tussen de regio's dient een netwerk tussen de centrales aangelegd te worden. De verwachte hoeveelheden telecommunicatieverkeer tussen de verschillende regios zijn gegeven in Figuur 1.

	E	G	H	M
E	0	12	31	3
G	12	0	1	13
H	31	1	0	23
M	3	13	23	0

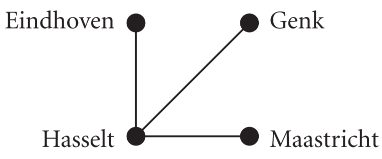


Figuur 1: Verkeersprognose en alle potentiële verbindingen

Elk getal in de tabel representeert de hoeveelheid informatie welke van een regio naar een andere regio verstuurd moet worden, gemeten in Megabits per seconde (MB/s). Om communicatie tussen de regio's mogelijk te maken dient RAMCA verbindingen te maken tussen de centrales. Tussen elk tweetal centrales kan in principe een verbinding gemaakt worden (zie Figuur 1). Elke verkeersstroom (elk getal in de tabel) dient nu van bron naar bestemming te worden verstuurd. Bijvoorbeeld, van Eindhoven naar Genk dient 12MB/s te worden verstuurd. Dit zou kunnen via het rechtstreekse pad (Eindhoven, Genk), via het pad (Eindhoven, Maastricht,

Genk), of één van de vele andere mogelijke paden. Elke verkeersstroom dient echter in zijn geheel via één uniek pad te worden verstuurd van bron naar bestemming.
Om verkeersstromen over een verbinding van het netwerk te versturen, dient RAMCA capaciteit te installeren op de verbindingen in het netwerk. Capaciteit kan geïnstalleerd worden in eenheden van 10 M/s, en elke eenheid kost 1000 EURO, onafhankelijk van de verbinding waarop een eenheid capaciteit wordt aangelegd. De hoeveelheid capaciteit welke op een verbinding wordt aangelegd, dient groter of gelijk te zijn aan de som van de verkeersstromen in beide richtingen over de verbinding. Stel bijvoorbeeld dat op de verbinding Hasselt-Maastricht 28 Mb/s in de ene richting en 24 Mb/s in de andere richting wordt verstuurd, dan is het totaal 52 Mb/s, hetgeen een capaciteit van 6 eenheden vergt.
Een mogelijk netwerk-ontwerp is de installatie van capaciteit op de verbindingen Eindhoven-Hasselt, Maastricht-Hasselt en Genk-Hasselt (zie Figuur 2). De verkeersstromen worden hierbij als volgt gerouteerd. Verkeersstromen met als bron of bestemming Hasselt worden direct van bron naar bestemming gestuurd, en alle overige verkeersstromen worden via het pad (bron, Hasselt, bestemming) verstuurd. De resulterende hoeveelheid verkeer op de verbindingen welke gebruikt worden en de minimale benodigde capaciteit op deze verbindingen is weergegeven in de tabel van Figuur 2. De overige verbindingen worden niet gebruikt, hierop wordt geen capaciteit geplaatst, en geven geen extra kosten. De totale kosten van deze oplossing bedragen 24000 EURO.
Bedenk een zo goedkoop mogelijk netwerk ontwerp voor RAMCA.

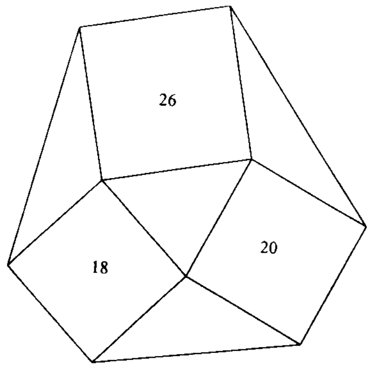
verbinding	H-E	H-G	H-M
hoeveelheid	92	52	78
aantal eenheden capaciteit	10	6	8
kosten	10000	6000	8000



Figuur 2: Netwerk-ontwerp

Kunt u aangeven of de door u bedachte oplossing optimaal is, d.w.z. dat er geen goedkopere oplossing mogelijk is?

Opgave 2: En de boer, hij ploegde voort...
Een boer is de gelukkige bezitter van drie vierkante stukken weiland, met de respectievelijke oppervlakten 18, 20 en 26 are. Samen omsluiten deze vierkante weilanden een driehoekig stukje land. Zie Figuur 3.



Figuur 3: Plattegrond van stukken weiland

Op zekere dag wordt de boer in de gelegenheid gesteld om het driehoekige stukje land dat is omsloten aan te kopen, en dat niet alleen, maar tevens de drie aangrenzende driehoekige stukjes land.
Hoe groot wordt dan de totale oppervlakte van het nieuwe, zeshoekige stuk land dat ontstaat?

Opgave 3: A day at the races
Vorige week bracht Harry een gezellige zaterdagmiddag door bij de paardenrennen op de beroemde baan van Aintree. Zoals te doen gebruikelijk wilde hij wel een gokje wagen. Zijn interesse ging uit naar de race van 15.00 u, omdat de jockey van het favoriete paard Lucky Boy een goede bekende van hem is. Aangekomen bij de bookmaker viel hem bij het bestuderen van de noteringen echter iets bijzonders op.

3-1	Lucky Boy
4-1	Blue Lightning
7-1	Flash Gordon
9-1	Razor Blade
39-1	Living Legend
39-1	Brown Sugar
39-1	Excalibur
39-1	Solid Rock
39-1	Light Foot

Harry dacht een ogenblik na en zette toen op elk van de paarden en bedrag in. Terwijl inmiddels de paarden zich aan het warm lopen waren, raakte Harry in gesprek met de bookmaker.
"Een mooie dag vandaag", zei de bookmaker.
"Een bijzonder mooie dag", beaamde Harry. "Te meer, daar u me ook nu al mijn winst kunt uitbetalen."
"Maar mijnheer", glimlachte de bookmaker, "de race moet nog gelopen worden."

“Daarin heeft u gelijk”, antwoordde Harry, “maar ik verzeker u dat u me aan het eind van de race mijn inzet van zojuist plus 200 pond winst verschuldigd zult zijn.”
En zo geschiedde.
Welke bedragen zette Harry in op de verschillende paarden?
N.B. Een notering 3-1 betekent dat voor ieder ingelegd pond bij winst de uitbetaling 3 pond is, plus daarnaast teruggave van de inleg.

Opgave 4: Schuitje varen
Drie gevangenen en drie bewakers arriveren aan de (linker)oever van een rivier, die ze moeten oversteken. Dit oversteken kan alleen gebeuren met de tweepersoons roeiboot die ze ter beschikking hebben. Twee van de gevangenen zijn niet in staat om te roeien, alle overige personen wel. De reglementen schrijven voor dat waar gevangenen en bewakers samen zijn, de bewakers nooit een minderheid mogen vormen, daar dit hun leven in gevaar zou kunnen brengen. Gevangenen mogen echter wel op een oever alleen gelaten worden (men kan ze bijvoorbeeld aan een boom vastketenen).

Opgave 5: De voetbalcompetitie
De acht beste voetbalclubs van Nederland, genaamd A, B, C, D, E, F, G en H, hebben besloten de KNVB telecompetitie te verlaten en een onderlinge competitie te spelen. Ze zijn van plan een zogenaamde dubbelrondige competitie te spelen, waarin iedere club iedere andere club 2 maal ontmoet: 1 maal thuis en 1 maal uit. Deze competitie bestaat uit 14 ronden van ieder 4 wedstrijden. In iedere ronde spelen de clubs dus precies 1 keer. Nu wordt aan jullie gevraagd een programma op te stellen voor de eerste helft van deze competitie, waarin iedere club iedere andere club precies 2 maal dient te ontmoeten. Uit of thuis is in deze onbelangrijk. In de tweede helft worden dan de returns gespeeld. Deze helft is “symmetrisch” ten opzichte van de eerste helft. Dus als je besluit om in ronde 1 de wedstrijd A-B te spelen, dan wordt in ronde 8 (de eerste ronde uit de tweede helft) de wedstrijd B-A gespeeld. Er is echter een heel belangrijke eis waaraan je schema dient te voldoen. Clubs vinden het vervelend om in twee opvolgende ronden thuis (of uit) te spelen. Zoiets wordt een break genoemd. De wedstrijden in de eerste helft dienen nu zodanig vastgesteld te worden dat dit aantal breaks over alle clubs tezamen tot een minimum beperkt is. Uiteraard is het de bedoeling dat ook aangetoond wordt dat je wedstrijdschema van de eerste 7 ronden een minimaal aantal breaks heeft.
Hierna vind je een schema dat voldoet aan de eis dat iedere club tegen iedere andere club speelt. Het aantal breaks in dit schema is echter veel meer dan strikt nodig.

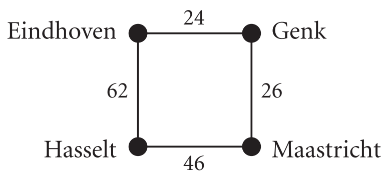
ronde 1	ronde 2	ronde 3	ronde 4	ronde 5	ronde 6	ronde 7
A-B C-D E-F G-H	A-C B-D E-G F-H	A-D C-B E-H F-G	A-E B-F C-G D-H	A-F B-G C-H D-E	A-G B-H C-E D-F	A-H B-E C-F D-G

Zoals je ziet heeft club A in de ronden 1 en 2 een thuiswedstrijd, en heeft club D in deze ronden een uitwedstrijd. Beiden hebben tussen deze ronden dus een break. In onderstaande tabel kun je je eigen wedstrijdschema beschrijven.

ronde 1	ronde 2	ronde 3	ronde 4	ronde 5	ronde 6	ronde 7

Oplossingen en resultaten

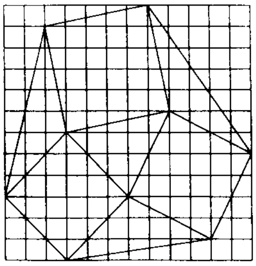
1 Telecommunicatie
De moeilijkste opgave, met om te beginnen al een lastig stuk tekst. Voor de oplossing is het belangrijk in te zien, dat rechtstreekse routering van alle verkeersstromen groter of gelijk 10 deel uit maakt van een optimale oplossing. Deze deeloplossing, afgebeeld in Figuur 4, kost 18000 Euro.



Figuur 4: Optimale routering van stromen groter of gelijk 10

Door de restcapaciteit als volgt efficiënt te gebruiken, komen er geen extra kosten bij:
3 Mb/s Eindhoven-Maastricht via Genk
3 Mb/s Maastricht-Eindhoven via Hasselt
1 Mb/s Genk-Hasselt via Maastricht
1 Mb/s Hasselt-Genk via Eindhoven
Een derde deel van de groepjes vond de oplossing van 18000 Euro en vier daarvan hadden ook nog een plausibele redenering over de optimaliteit. Ruim een derde deel kon met deze opgave geen kant op. Voor de Belgische deelnemers was deze opgave gemiddeld moeilijker.

2 En de boer, hij ploegde voort...
De eenvoudigste opgave. Maar liefst 13 van de 23 groepjes ploeterden zich foutloos door cosinusregels en oppervlakte-berekeningen naar het antwoord van 100 are. Dit kon ook op elegante wijze gevonden worden door de figuur in te passen in een roostervierkant van 12 bij 12 met alle hoekpunten op roosterpunten (zie Figuur 5).



Figuur 5: Stukken weiland ingepast in een rooster

Maar zonder ruitjespapier was dat natuurlijk lastig. Een fout die meer dan eens opdook, was dat voor de oppervlakte van een driehoek breedte maal hoogte werd genomen. Bij deze opgave scoorden de Belgen gemiddeld beter.

3 A day at the races
Harry zag waarschijnlijk dat 1/4 + 1/5 + 1/8 + 1/10 + 5/40 kleiner is dan 1. Dat maakt het mogelijk door een bepaalde verdeling van de inzet over alle paarden altijd te winnen. Bij inzetten van A/4, A/5, A/8, A/10 en 5 maal A/40 is de totale inzet 0.8 A en is de uitbetaling altijd A. De winst is dus 0.2 A = 200 pond, waaruit de ingezette bedragen kunnen worden berekend. Ruim de helft van de deelnemende groepjes had deze opgave geheel goed. Vaak werd gewerkt met een stelsel van lineaire vergelijkingen.

4 Schuitje varen
De deelnemers bleken creatief in het gebruik van notaties om de achtereenvolgende situaties te representeren. Ruim de helft van de groepjes vond een optimale oplossing in 13 oversteken. Hiernaast een voorbeeldoplossing, zigzag te lezen.

De opgave bleek voor de Nederlanders gemiddeld eenvoudiger.

5 De voetbalcompetitie
Bij deze opgave had ieder groepje wel iets goed, maar geen enkel groepje alles. Meestal kwam men tot het aantal van acht breaks als benodigd aantal; het kan echter met minder. De ondergrens van het aantal breaks is zes. Dit is als volgt in te zien. Vier clubs spelen de eerste ronde thuis. Stel nu twee of meer daarvan hebben geen breaks, dan spelen ze altijd tegelijkertijd uit of thuis en dus niet tegen elkaar. Dit levert dus minstens drie breaks en net zo minstens drie via de analoge redenering vanuit de clubs die de eerste ronde uit spelen. Dat er ook oplossingen zijn met precies zes breaks blijkt uit het volgende voorbeeld. De zes breaks zitten tussen ronde 2 en 3 voor club A en H, tussen 4 en 5 voor F en C, tussen 5 en 6 voor D en E; B en G hebben geen break.

ronde 1	ronde 2	ronde 3	ronde 4	ronde 5	ronde 6	ronde 7
A-B	D-A	H-F	D-H	H-B	A-H	H-C
C-D	B-C	C-A	F-C	F-D	B-F	F-A
E-F	H-E	E-B	A-E	E-C	E-D	D-B
G-H	F-G	G-D	B-G	G-A	C-G	G-E

Het probleem van deze opgave is zeer reëel. De universiteiten van Twente en Maastricht staan de KNVB terzijde bij het oplossen van complexere varianten.

Vervolg

De zesde Mathematische Modelleercompetitie Maastricht zal zijn op zaterdag 22 januari 2000. Men kan zich opgeven bij het secretariaat Kwantitatieve Economie, Faculteit der Economische Wetenschappen en Bedrijfskunde, Universiteit Maastricht, Postbus 616, 6200 MD Maastricht (NL), 0(031)43-3883834/3835. Algemene informatie is te verkrijgen bij Dr. Frank Thuijsman van de capaciteitsgroep Wiskunde (/3489) of Prof. Hans Peters van de capaciteitsgroep Kwantitatieve Economie (/3834).

o = bewaker,
x = gevangene die niet kan roeien,
+ = gevangene die wel kan roeien,
> en < = roeirichting.

linkeroever	roeien	rechteroever
oooxx+	+x >	
ooox	< +	+x
ooox+	+x >	x
ooo	< +	xx+
ooo+	oo >	xx
o+	< xo	ooxx
oox+	+o >	ox
ox	< ox	oox+
ooxx	oo >	o+
xx	< +	ooo+
xx+	x+ >	ooo
x	< +	ooox+
x+	x+ >	ooox
		oooxx+

Schoolboeken en studie-resultaten

Anne Fey - den Boer

De faculteit Technische Natuurkunde van de TUE besteedt veel aandacht aan het verbeteren van de aansluiting met het vwo. Vorig jaar is door het opleidingsinstituut uitgebreid de voorkennis natuurkunde en wiskunde B van de vwo-gediplomeerde geïnventariseerd; niet alleen de formele kennis, maar ook op welke manier met de stof geoefend is, door ons vertaald in: wat voor opgaven staan er in het schoolboek. Deze vraag wordt nog interessanter als je bedenkt dat in het studiehuis de leerlingen vaker zelfstandig uit hun boeken zullen werken.
En passant bleek dat er behoorlijke verschillen zijn tussen de tentamenresultaten van studenten die Getal en Ruimte, of Moderne Wiskunde gebruikt hebben. Wij geloven dat dit te maken heeft met het verschil in de opgaven van deze twee methoden.

Aanleiding

Het onderzoek begon aanvankelijk alleen naar de natuurkunde-voorkennis. Maar het eerste jaar van de studie Technische Natuurkunde is sterk wiskundig, vooral in vergelijking tot de vwo-natuurkunde. Bij het vak Elektriciteit en Magnetisme 1 moeten bijvoorbeeld veel integralen worden opgesteld.
Tijdens een instructie waarin het elektrisch veld in een punt ten gevolge van een continue ladingsverdeling berekend moest worden, viel mij op dat sommige studenten hier helemaal geen raad mee wisten, terwijl anderen wel aan de slag gingen (niet noodzakelijk foutloos).
Verbaasd over dit verschil, ging ik in de meest gebruikte wiskundeschoolboeken, Getal en Ruimte, en Moderne Wiskunde, eens kijken of daar een verschil te vinden was in de manier waarop integralen behandeld zijn.
Ik vond de uitleg in de tekst niet veel verschillen, maar waar Getal en Ruimte alleen opgaven geeft waarin gegeven integralen uitgerekend moeten worden, geeft Moderne Wiskunde ook opgaven met een natuurkundige context waarin de leerling zelf de integraal moet opstellen, en dus over de variabele en de grenzen nadenken.
Bij de volgende instructie kon ik van de studenten vrij precies ‘raden’ welk wiskundeboek ze op school gebruikt hadden. Een onderzoeksvraag werd geboren: wat is het verschil tussen Getal en Ruimte en Moderne Wiskunde, en is dit verschil ook nog in de tentamenresultaten terug te vinden?

Getal en Ruimte, en Moderne Wiskunde

Bij het vergelijken van een paar overeenkomende onderwerpen uit deze boeken, namelijk het eerste hoofdstuk integreren, cyclometrische functies en de kettingregel, bleek steeds: de methoden bieden dezelfde stof aan, maar het karakter van de opgaven verschilt. Getal en Ruimte biedt meer herhaling binnen het onderwerp, uitgebreidere uitgewerkte voorbeelden en hulp. Leerlingen hebben met deze methode relatief weinig hulp van de docent nodig. Moderne Wiskunde laat juist meer stof uit vorige hoofdstukken terugkomen, geeft meer context, bijvoorbeeld uit de natuurkunde, stelt de vragen opener en zorgt zo voor meer variatie in de opgaven. Eén student die op school met beide methoden had gewerkt, oordeelde: ‘Moderne Wiskunde had minder oefenwerk, maar iedere opgave had wel een addertje onder het gras’. Onze hypothese is dat deze stijl bevorderlijk is voor het toepassen van de wiskunde in bijvoorbeeld de studie Technische Natuurkunde.

In Euclides is eerder gepubliceerd over het verschil tussen wiskundemethoden, namelijk door Jacob Perrenet en Wim Groen[1,2,3]. Zij hadden een soortgelijke hypothese, dat Moderne Wiskunde-leerlingen beter zouden zijn in ‘horizontale transfer’; het toepassen van de stof in een andere context. In de resultaten van hun hiervoor ontworpen transfertest vonden zij dit echter niet bevestigd.
Enkele verschillen van dat onderzoek met het hier beschrevene zijn: Perrenet en Groen testten leerlingen van 3 havo en vwo, wij hebben te maken met een selecte groep vwo-gediplomeerden, die veel talent en belangstelling voor B-vakken hebben. Perrenet en Groen onderzochten hele klassen en kon-

den zo leraar-effecten in hun onderzoek onderscheiden, van onze studenten komen er maar - soms - hoogstens 2 uit dezelfde klas. We veronderstellen daarom dat eventuele leraareffecten uitgemiddeld zullen zijn. Ten slotte is de studie natuurkunde natuurlijk niet speciaal ontworpen om transfer te testen, maar het is wel zo dat de voorkennis van wiskunde B van belang is.

Het eerste trimester van de natuurkundestudie

In het eerste trimester van de studie Technische Natuurkunde aan de TUE is de student intensief met wiskunde bezig. Er zijn twee zware wiskundevakken, Analyse 1 en LaLa 1 (lineaire analyse en lineaire algebra), maar ook bij de natuurkundevakken Elektriciteit en Magnetisme 1 (inmiddels verhuisd naar het tweede trimester) en Mechanica 1 komt een stuk meer wiskunde kijken dan op het vwo. De student moet hier met vectoren kunnen omgaan, stelsels vergelijkingen, differentiaalvergelijkingen, en integralen kunnen opstellen en oplossen. Dit zijn de vier vakken waarvoor de voorkennis van wiskunde B (analyse) belangrijk is.

Tentamenresultaten

Geïnventariseerd zijn de cijfers voor bovengenoemde vier vakken, voor drie groepen eerstejaars studenten: de natuurkundestudenten van ‘97-’98, de natuurkundestudenten van ‘98-’99 , en de wiskundestudenten van ‘97-‘98. Ik werd namelijk na het zien van de eerste resultaten nieuwsgierig hoe dit er voor de wiskundestudie uit zou zien. De studie wiskunde bevat dezelfde vakken, alleen geen E&M 1.

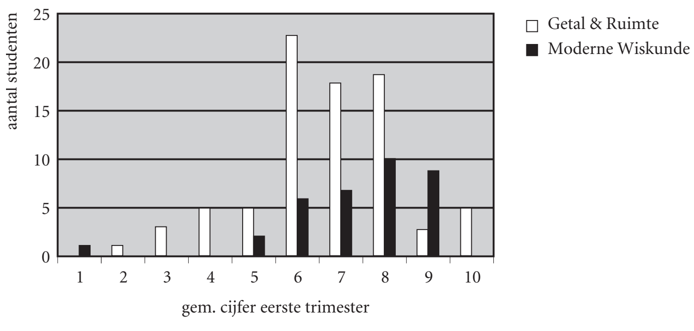
De resultaten waren opmerkelijk. Alle groepen afzonderlijk, en ook de vakken afzonderlijk, lieten steeds dezelfde trend zien: de studenten die Moderne Wiskunde gebruikt hebben, scoren hoger.

Opvallend is dat dat zowel voor de natuurkunde- als de wiskundevakken geldt. Bij de wiskundevakken kun je natuurlijk wat moeilijker aannemelijk maken dat daar sprake is van horizontale transfer. Om niet in dubieuze speculaties te vervallen over wat hier dan aan de hand is (studenten hebben meer tijd voor hun wiskunde als ze minder moeite met de natuurkunde hebben?), heb ik gewoon het hele eerste trimester als één geheel opgevat, en het gemiddelde cijfer voor de genoemde vier vakken, voor zover getentamineerd, berekend. In de onderstaande figuur zijn deze gemiddelde cijfers voor alle genoemde studenten samen weergegeven, gesplitst in Getal en Ruimte- en Moderne Wiskunde-gebruikers.

De figuur laat duidelijk het verschil zien tussen studenten die Moderne Wiskunde, of Getal en Ruimte gebruikt hebben. De gemiddelde score van de Moderne Wiskunde-gebruikers is 7,3, tegen 6,6 voor de Getal en Ruimte-gebruikers. De p-waarde voor dit verschil is 3,8 %, wat voor deze niet al te grote steekproef een zeer kleine waarde is. Hoe deden de Moderne Wiskunde-studenten het op school? Om dat na te gaan heb ik de eindexamencijfers voor wiskunde B vergeleken; die zouden natuurlijk normaal gesproken voor beide groepen gelijk moeten zijn. Dat scheelt inderdaad maar weinig: 8,0 voor de Getal en Ruimte-gebruikers, en 8,1 voor de Moderne Wiskunde-gebruikers. De p-waarde van dit verschil is 46 %, zodat dit beslist niet significant genoemd kan worden. Gelukkig bieden beide boeken blijkbaar een even goede voorbereiding op het eindexamen.

Conclusies

Het valt niet te ontkennen dat er in de studie Technische Natuurkunde aan de TUE, sprake is van een leerboekeffect wat betreft de voorkennis wiskunde B. Opvallend genoeg verschillen de betreffende leerboeken niet in aangeboden stof, maar in het soort opgaven bij die stof. Blijkbaar gaat het bij voorkennis niet alleen om wat, maar ook vooral om hoe.
Ongetwijfeld heeft het bovenstaande weinig consequenties voor het middelbaar onderwijs. Maar voor de studie Technische Natuurkunde aan de TUE is het des te meer van belang, om beter rekening te kunnen houden met een verschil in voorkennis, en zo de aansluiting met het middelbaar onderwijs te verbeteren.



Literatuur

1 *J.Chr. Perrenet*
'Een transfertest voor wiskunde'
Euclides 61/4, 1985
2 *J.Chr. Perrenet en W. Groen*
'Transfertest halfweg'
Euclides 63/2, 1987
3 *J.Chr. Perenet en W. Groen*
'Transfertest afgerond'
Euclides 65/6, 1989

40 jaar geleden

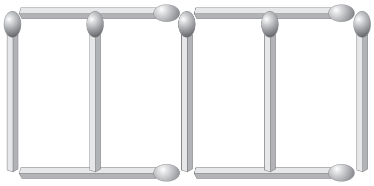
Ongeveer 45 vertegenwoordigers van 18 landen namen aan de besprekingen deel. De door de minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen aangewezen Nederlandse delegatie bestond uit Prof. H.Th.M. Leeman, Dr. L.N.H. Bunt en Dr. P.G.J. Vredenduin.
In het hier volgende verslag willen we trachten zo objectief mogelijk de hoofdpunten weer te geven die op het congres in behandeling kwamen. Daartoe zullen we ons houden aan de teksten van gehouden redevoeringen en ons onthouden van persoonlijk commentaar.
De voorzitter, Prof. Dr. M.H. Stone (V.S.), zette in zijn openingsrede het doel van het congres op de volgende wijze uiteen. Het onderwijs in wiskunde op de middelbare scholen is verouderd: bijna alle schoolwiskunde is reeds minstens 200 jaar oud. Er zijn onmiskenbare tekenen die erop wijzen, dat een radicale wijziging in dit programma onontkoombaar is. Dit seminarium is dan ook bijeengeroepen in de overtuiging, dat dergelijke veranderingen essentieel zijn om tot vooruitgang te komen en dat ze zorgvuldig moeten worden overwogen, voordat ze in praktijk worden gebracht. Twee redenen die de noodzakelijkheid doen blijken, zijn: 1e. de sterke groei van de zuivere wiskunde en 2e. de toenemende afhankelijkheid van andere wetenschappen van het gebruik van mathematische methoden en de daarmee gepaard gaande grotere behoefte aan mathematici. De kloof tussen schoolwiskunde en universitaire wiskunde wordt steeds groter. Uit het leerplan dienen daarom verwijderd te worden 'dead, useless, outmoded, or unimportant parts of mathematics' om deze te vervangen door belangrijker en meer stimulerend materiaal. Het nut van de wiskunde voor natuurwetenschap en techniek moet mede bepalend zijn voor het kiezen van de leerstof. Dat de positie van de wiskunde steeds belangrijker wordt, brengt met zich mee, dat er op de scholen een grotere hoeveelheid tijd aan dit vak moet worden besteed.

Gedeelte van het verslag van het historische congres, gehouden van 23 november tot en met 4 december 1959 in de abdij van Royaumont in de buurt van Parijs, veelal beschouwd als de aanzet tot de 'New Math'; uit Euclides 35 (1959-1960).

Oplossingen

van de puzzels in het programmaboekje van de jaarvergadering/studiedag

van de NVvW op 13-11-'99

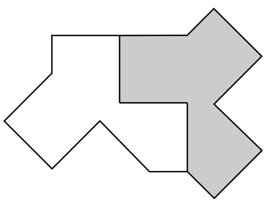
1. 

2. 510510;
   2;
   $2 \times 3 = 6$;
   $2 \times 3 \times 5 = 30$;
   $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$ enzovoort
3. Geen van beide $6 + 7 = 13$
4. 73
   $a@b = a^2 + b^2$
5. 80 treden
6. Hieronder staan de elementen die om de binomiaal-coëfficiënten heen staan.

$$\binom{n-1}{k-1} \quad \binom{n-1}{k}$$
$$\binom{n}{k-1} \quad \binom{n}{k} \quad \binom{n}{k+1}$$
$$\binom{n+1}{k} \quad \binom{n+1}{k+1}$$

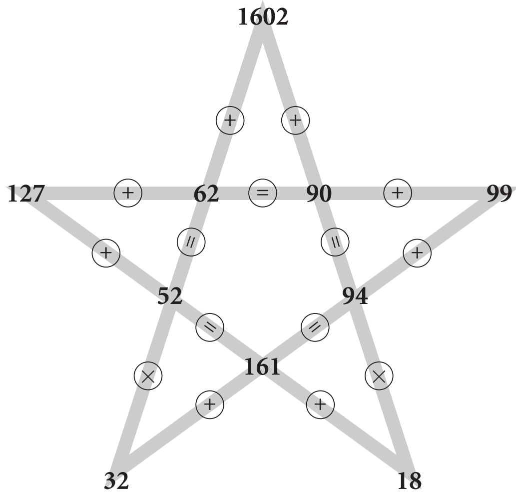
   Uitwerking van de vermenigvuldiging van de zes elementen levert het kwadraat rechts op.

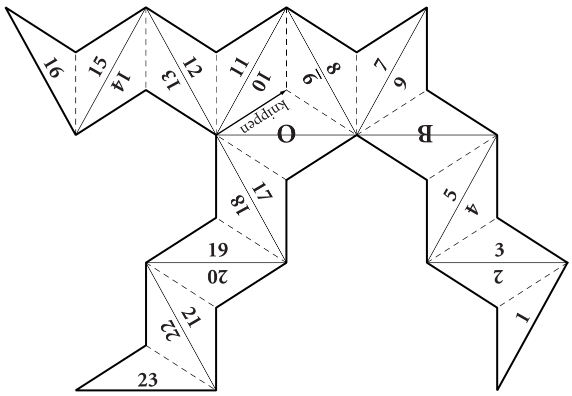
$$\left[\binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}\right]^2$$

7. 

8. Er zijn 64 verschillende mogelijkheden met de twee dobbelstenen. Van deze 64 komen er 10 boven de 36 uit.
   De kans is $\frac{10}{64} = \frac{5}{32}$.

9. 125 eenheidskubussen
10. De heer Wolvers heeft geen geld bij zich.
11. 1

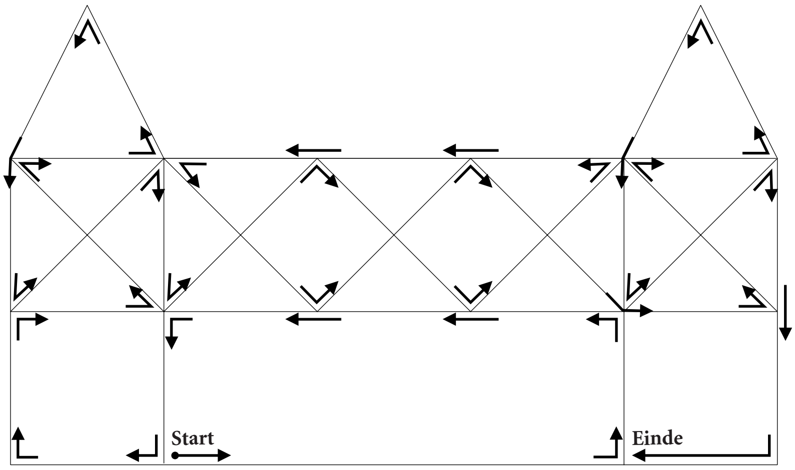


12. 

Tetrahedron

B op O	14 op 6	21 op 16
10 op 5	1 op 7	22 op 9
11 op 4	15 op 1	23 onder O
17 op 13	19 op 3	
18 op 12	20 op 2	

Eenlijner:



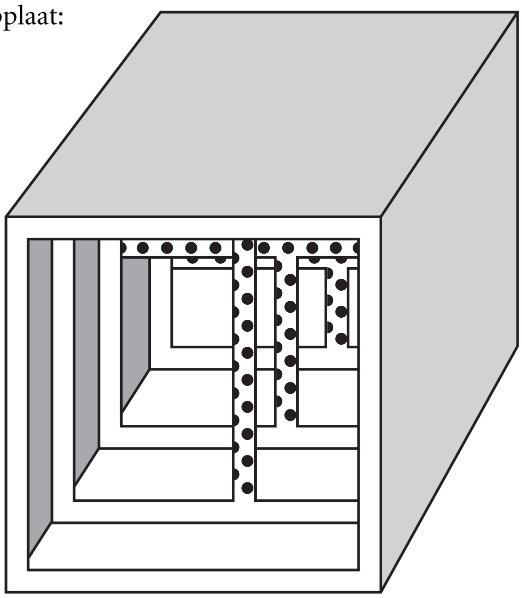
Alphametic:

6749
1753
——— +
8502

blz. 19 Welk gereedschap

De letter P: een stopnaald en een speldenkussen
De letter R: een raderwieltje en een schroef
De letter A: een steekpasser
De letter K: twee zwei- of zwaaihaken
De letter T: twee breinaalden
De letter I: een haaknaald
De letter S een rondbreinaald
De letter C: een figuurzaag
De letter H: twee vijlen en een plug
De letter E: een bahco, een kwast, een zaag en een beitel

Knipplaat:



Recreatie

Opgave 696

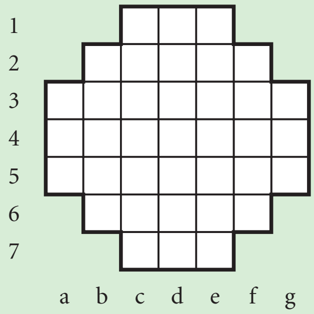
Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A,
2563 EB Den Haag

Als u lid bent van de Nederlandse Boeken Club of van de ECI, dan kunt U in het Club Center het nieuwste puzzelboek van Jack Botermans en Jerry Slocum aanschaffen. Na 'Optische Illusies en andere Puzzels' en 'Spiegeleffecten en andere verborgen illusies' is nu in deze reeks verschenen: ' 't Is me een raadsel'.
ISBN 90 5685 059 8.

Op 144 bladzijden worden onder andere puzzels getoond van soms 100 jaar geleden uit de verzameling van Jerry Slocum. Het is werkelijk een genot om al die mooie puzzels te bestuderen. Zoals je nu flippo's hebt, had je toen kaarten met een puzzel erop: zoekplaatjes, optische illusies, enz.

Een hoogtepunt van het boek is 'de oplossing' van het Franse solitaire spel. Dit bord heeft 37 pionnen.



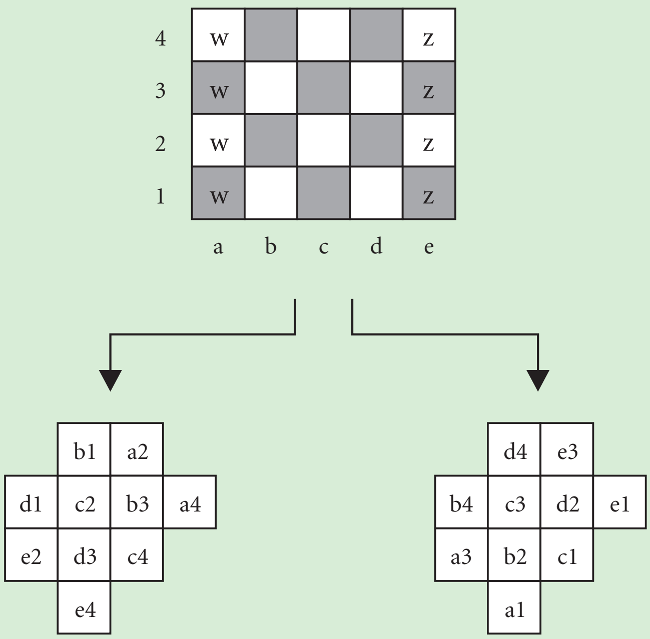
De bedoeling is om pion d4 weg te halen. Nu gaan we proberen het bord leeg te slaan d.m.v. horizontaal en verticaal springen. Bijvoorbeeld: d2 springt over d3 naar d4. Pion d3 wordt weggehaald. Zo slaan we het hele bord leeg op een na. Deze laatste pion moet in d4 terechtkomen. Het is al lang bekend dat dit ONMOGELIJK is.
De Belg Frans Cremers heeft een variant op de spelregels: haal d4 weg, ga nu slaan. Voordat je klaar bent zet je pion d4 terug in gat d4. Ga verder met slaan. Nu is het wel mogelijk om in d4 te eindigen! Het boek geeft een oplossing!

De opgave is nu om een andere pion dan d4 weg te halen, ga spelen en zet tijdens het spelen deze pion op de oorspronkelijke plaats terug. Zorg dat de laatste pion weer op deze plaats terechtkomt!

Als het u gelukt is, stuur dan uw oplossing binnen een maand in en u ontvangt 5 punten voor de doorlopende ladderwedstrijd.

Oplossing 693

Het spelletje ALTIJD SCHUIN! wordt gespeeld met 4 witte en 4 zwarte lopers op een 4x5 bord. Zoals elke schaker weet verandert een loper nooit van veldkleur. Dat betekent dat we het spelletje kunnen splitsen in witte velden en in zwarte velden.



Nu is de minimale oplossing in 2 maal 18 zetten, waarbij de witte en de zwarte lopers elkaar niet aanvallen, niet moeilijk meer te vinden.

a2-b3 ; e3-d2
a3-b2 ; d2-b4
b2-c1 ; e2-d3
b3-d1 ; d3-c4
a1-d4 ; e4-b1
d4-e3 ; b1-a2
d1-c2 ; b4-c3
c1-a3 ; c4-e2
c2-e4 ; c3-a1
e3-c1 ; a2-c4
a4-c2 ; e1-c3
c2-b1 ; c3-d4
c1-d2 ; c4-b3
a3-b4 ; e2-d1
b1-d3 ; d4-b2
d2-e3 ; b3-a2
b4-e1 ; d1-a4
d3-e2 ; b2-a3

Met 65 punten is winnaar van een boekenbon van ƒ 50,–:

Pieter Torbijn
Dignaland 7
2591 CA Den Haag

Heel hartelijk gefeliciteerd!



KALENDER

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in het lopende schooljaar. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Doorgeven kan ook via e-mail: cph@xs4all.nl

nr.	versch.	deadline
4	06-01-00	18-11-99
5	17-02-00	06-01-00
6	30-03-00	17-02-00
7	15-05-00	30-03-00
8	26-06-00	11-05-00

Wintersymposium Wiskundig Genootschap
zaterdag 8 januari, Amersfoort
Thema: Optimalisatie
076-5273267
Zie aankondiging hiernaast

Wiskunde en ICT in 21e eeuw
do. 20 januari 2000
APS-conferentie, Houten
030-2856722
Zie advertentie op de volgende bladzijde

Eerste ronde Wiskunde Olympiade
vr. 21 januari 2000 !!!!
Secret.: 026 - 3521294

Wiskunde in het vmbo
woensdag 2 febr. 2000
APS-conferentie, Utrecht
030 2856722
Zie advertentie op de volgende bladzijde

Nationale Wiskunde Dagen
vr. 4 en za. 5 februari 2000
Freudenthal Instituut
030 2611611
www.fi.uu.nl/nwd
Zie aankondiging 74-8

WWW-lympiade
ma. 7 feb. -
vr. 11 feb. 2000
Freudenthal Instituut
030 2611611
www.fi.uu.nl/wwwlympiade
Zie aankondiging 74-8

Kangoeroe-wedstrijd
vr. 17 maart 2000
TUE: 040 - 2472738
Aankondiging volgt later

Regionale ICT-Onderwijsdagen
16/2/00 Amsterdam
23/2/00 Groningen
15/3/00 Eindhoven
29/3/00 Rotterdam
13/4/00 Hengelo
26/4/00 Utrecht
www.ict.onderwijs.nl

Examendata 2000
vbo/mavo C/D
vr. 26/5/00
havo A/A12
do. 25/5/00
havo B/B1/B12
di. 23/5/00
vwo A
wo. 17/5/00
vwo B/profi
do. 25/5/00

9th International Congress on Mathematical Education (ICME)
31/6/00 - 6/7/00
Tokyo, Japan
www.ma.kagu.sut.ac.jp/~icme9/

Internetsites voor wiskundedocenten:

NVvW website
Bezoek regelmatig de website van de NVvW. Boordevol actuele informatie
www.euronet.nl/~nvvw

Examens te downloaden
www.cito.nl

Schoolsite over de tweede fase
homepages.msn.com/Library/Lawn/jandriessen

Computeralgebra online
mss.math.vanderbilt.edu/~pscrooke/toolkit.html

Regionale ICT-Onderwijsdagen
www.ict.onderwijs.nl
www.school-computer.nl

Kennisnet
www.kennisnet.nl
Oproep wiskundedocenten:
www.kennisnet.nl/overkennisnet/portal/zvf/oproep.html

Computerprogramma Funiter
www.xs4all.nl/~stijnw
Zie bladzijde 83 e.v.

Suggesties voor interessante sites of interessante free-ware voor wiskundedocenten graag zenden aan e-mail: cph@xs4all.nl

Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap

Optimalisatie, Theorie en Praktijk

Het Wintersymposium van het Wiskundig Genootschap zal in het jaar 2000 plaatsvinden op

zaterdag 8 januari

en wordt gehouden in het

Johan van Oldenbarnevelt Gymnasium
Thorbeckeplein 1
Amersfoort.

Het symposium is in de eerste plaats bedoeld voor leraren, maar natuurlijk is iedere belangstellende van harte welkom.
Het symposium is dit keer gewijd aan **Optimalisatie**.

programma:

9.30 - 10.00	Ontvangst met koffie
10.00 - 11.00	**Het handelsreizigersprobleem** prof.dr. J.K. Lenstra
11.00 - 11.15	pauze met koffie
11.15 - 12.15	**Grafen en Optimalistatie** prof.dr. C. Hoede
12.15 - 13.30	pauze, waarin men deel kan nemen aan een gezamenlijke lunch
13.30 - 14.30	**Volgordeproblemen in een productieproces** dr.ir. W.H. Haemers

De deelname is gratis. Wie wil meedoen aan de gezamenlijke lunch wordt verzocht voor *31 december 1999* een bedrag van *ƒ* 17,50 over te maken op gironummer 3391318 t.n.v.
R. Bosch, Heiakker 16, 4841CR Prinsenbeek.
Voor inlichtingen kunt u bellen 076-5273267 (overdag) of 076-5419757 ('s avonds).

APS-Wiskunde

Ook in 2000 organiseert APS-wiskunde weer diverse **conferenties**

Dinsdag 11 januari: ***Conferentie "Opbrengsten Profi-project"***
Donderdag 20 januari: ***Conferentie "Toepassen van ICT in het wiskundeonderwijs"***
Woensdag 2 februari: ***Conferentie "Wiskunde in het vmbo" (herhaling)***

Tevens zijn de volgende uitgaven van APS-wiskunde zojuist verschenen:



***Zorg voor bruikbaarheid**,*
terugblik op invoering
W12-16
ƒ 29,50



***Wiskunde en Internet**,*
een praktische
handleiding
ƒ 24,50

Bel, e-mail of schrijf voor meer informatie:

APS-Informatiepunt wiskunde
Postbus 85475
3508 AL UTRECHT

telefoon: 030 - 28 56 722
e-mail: wiskunde@aps.nl
URL: www.aps.nl/vo

N I E U W

VU-Stat voor Windows

Het totale statistiekpakket voor het hele voortgezet onderwijs; voor leerlingen en docenten. Compleet met bestanden en simulaties.

VU-Stat voor Windows is een nieuw programma, gebaseerd op de functionaliteiten van het bekende DOS-programma *VU-Stat voor de basisvorming*. *VU-Stat voor Windows* heeft alle voordelen van een modern Windows-pakket, zoals een gemakkelijke bediening met de muis, fullcolour functionaliteit en een Helpfunctie. Het programma heeft een omvang van ca 1.4 MB en werkt onder Windows 3.11 (en hoger), Windows 95 en Windows 98.

Geschikt voor basisvorming en Tweede Fase
VU-Stat voor Windows is voor zowel leerlingen in de basisvorming als voor bovenbouwleerlingen op maat in te stellen. In de wiskundemethoden zijn in de nieuwe delen 2 voor de basisvorming en in de nieuwe delen voor de Tweede Fase practica en opdrachten opgenomen die gebaseerd zijn op *VU-Stat voor Windows*.

Leerlinglicenties
Bij de delen *vwo A1 deel 3* en *vwo B1 deel 5* van *Moderne wiskunde 7e editie* en *Netwerk 2e editie* wordt een diskette met leerlinglicentie *VU-Stat voor Windows* meegeleverd. Leerlinglicenties zijn daarnaast ook te bestellen in sets van 20 diskettes. De leerlinglicentie is uitsluitend voor thuisgebruik.

Schoollicenties
De schoollicentie (netwerkversie) van *VU-Stat voor Windows* is geschikt voor Novell- en Windows NT-netwerken. Schoollicenties worden verleend per vestiging/locatie. Voor gebruikers van *Moderne wiskunde 7e editie* en *Netwerk 2e editie* geldt een speciale prijs.

VU-Stat voor Windows, kennismaken en toepassen
Het aanvullende boekje *VU-Stat voor Windows, kennismaken en toepassen* leert de leerling omgaan met het pakket, levert (voor bovenbouw havo-vwo) ideeën voor praktische opdrachten en helpt bij het zelf maken van bestanden en het opzetten en verwerken van een enquête.

VU-Stat voor Windows

90 01 09022 2 schoollicentie (netwerkversie) CD-Rom, diskette en *VU-Stat voor Windows, kennismaken en toepassen*	ƒ 1050,00
voor gebruikers *Moderne wiskunde 7e editie* en *Netwerk 2e editie*	**ƒ 350,00**
90 01 09032 x leerlinglicentie (set 20 stuks)	ƒ 300,00
90 01 83296 2 VU-Stat voor Windows, kennismaken en toepassen	ƒ 8,40

Meer informatie of bestellen?
Stuur de coupon in een gefrankeerde enveloppe naar Wolters-Noordhoff, t.a.v. afd. voorlichting exact, Postbus 58, 9700 MB Groningen, of bel: (050) 522 63 11.

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11

Wolters Noordhoff

Aanvraagcoupon

Ja, ik (onze school) wil graag meer informatie over *VU-Stat voor Windows* en de algemene leveringsvoorwaarden.

Stuur de documentatie over *VU-Stat voor Windows* en het bijbehorende bestelformulier naar:

Naam school:

Ter attentie van:

Adres:

Postcode:

Plaats:

Euclides nov. 1999 – 419/9260